とやま科学オリンピック 2018

数　学

（高校部門）

2018 年 8 月 9 日(木)

時間: 9 時 45 分～12 時 15 分(150 分)

注意事項

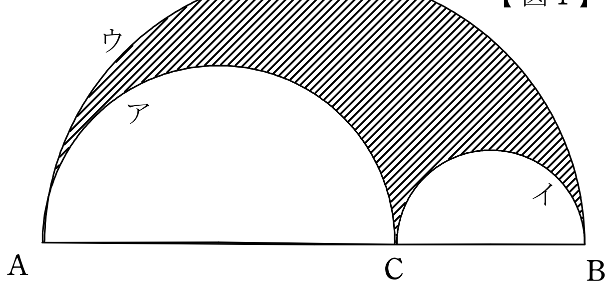
１．指示があるまで、問題冊子を開かないこと。
２．問題は$\boxed{1}$から$\boxed{5}$まで７ページにわたって印刷してあります。
３．解答はすべて解答用紙に記入し、解答用紙だけを提出すること。
４．解答用紙は５枚あります。
５．参加番号を解答用紙の決められた欄に記入すること。

みなさんの健闘を期待しています。

富山県　　富山県教育委員会

1 （1）下の【図１】のように，半円ア，イ，ウの直径はそれぞれAC，BC，ABです。また，半円ウに２つの半円 ア，イがそれぞれ点A，Bで内接し，２つの半円ア，イは点Cで接しています。このとき，それら３つの半円で囲まれた斜線部の面積を求めなさい。 ただし，半円ア，イの半径はそれぞれ a , b とする。

【図１】



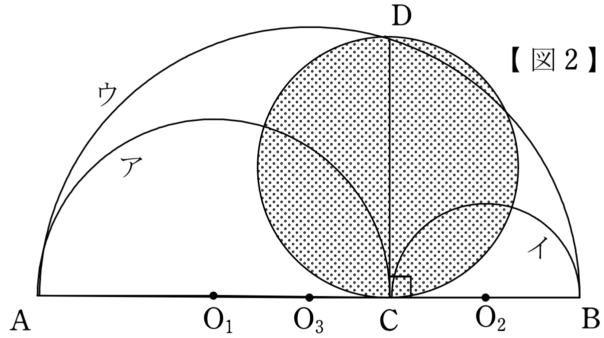
【図１】のような囲まれる領域は，その形からアルベロス(靴屋のナイフ)と呼ばれています。靴職人が使っていたナイフの形に似ていたのでこう呼ばれています。

このような問題は，古代ギリシアの数学者アルキメデス等が研究していました。また，富山県南砺市の宇佐八幡宮や荊波（うばら）神社にはこの問題に似た算額が奉納されていて、私たちの祖先も図形に関する問題に興味•関心をもっていたことがわかります。

次の問題を考えてみましょう。

（2）下の【図２】のように，半円ア，イ，ウの中心をそれぞれ O_1 , O_2 , O_3 とおきます。点Dは半円ウの円周上にあり，線分CDは半円アと半円イとそれぞれ接しています。このとき，線分CDを直径とする円の面積を求めなさい。

【図２】

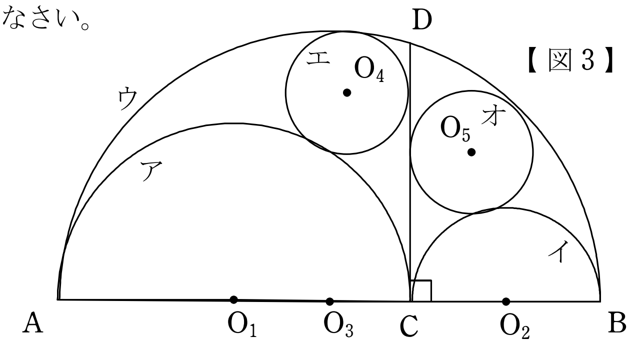


（3）下の【図３】のように 直線CDでアルベロスを分割してできる２つの弧状三角形（辺が円弧または直線がある三角形）の内接円エ，オがあります。円エ，オの中心をそれぞれ O_4，O_5 とし，円エ、円オの半径をそれぞれ r_4 ，r_5 とします。

① r_4 を求めなさい。

② $r_4 = r_5$ となります。その理由を記述しなさい。

【図３】



2　昨年８月，富山県美術館がオープンしました。連日，多くの観覧希望者が訪れ，開館前から行列を作りました。午前 9 時には窓口に 180 人並んでいました。その後、一定の割合で人数が増えるものとします。窓口 2 つのときは 4 分 30 秒でその行列がなくなりますが，窓口を 3 つ にすると2 分 30 秒で行列がなくなります。

（1）窓口 1 つで 1 分間に減る人数を求めなさい。

（2）毎分何人の割合で人が増えるか求めなさい。

小矢部市にある稲葉山牧場では，「稲葉メルヘン牛」と称して牛を飼っており，観光客が牛と触れあうことができます。この牧場では，15 頭の牛を飼い始めると 46 日間で草はなくなり，20 頭牛を飼うと 23 日間で草はなくなります。牧場には，はじめ一定量の草が生えており，その後毎日一定の割合で生えるとします。牛 1 頭が1日に食べる草の量は定まっているとき，次の問いに答えなさい。

（3）33 頭の牛を飼うとき，何日間で草がなくなるか求めなさい。

（4）牧場で新しく牛を何頭か飼い始めました。飼い始めて 3 日目から 8 日目までの6日間は激しい雨が断続的に降ったため，その間，牛の食欲が減り，草を食べる量が半分になりました。しかし，その雨のため，9 日目から14日目までの 6 日間は草の生える量が 2 倍になり，結果的に 23 日間で草がなくなりました。このとき，牧場で牛を何頭飼っていたか求めなさい。

$\boxed{3}$　富山市内に住む立山君は，普段は自転車で高校に通学していますが，雨が降った日や，冬の時期は電車を利用して登校しています。電車を利用するために富山駅の自動券売機で切符を購入し，改札を通った立山君は， ICカードを利用して改札を通る高校生を目にしました。立山君もICカードを利用したいと思い，電車の運賃について調べることにしました。

ある鉄道会社では現在，最低運賃200円から1500円まで10円きざみで運賃が設定されています。2019年10月からは消費税の税率が現在の8％から10％へ引き上げられることが決まっており，この鉄道会社では，ICカードの利用促進と，消費税増税分の適正な課税を考え，次のように運賃を改定することを検討しています。

① ICカードを利用する場合

改定前の運賃に $\frac{110}{108}$ を乗じ，$\underset{\text{A}}{\underline{\text{1円未満の端数を切り捨て}}}$，1円単位にした額を新運賃とする。

② 券売機等で発売する切符を利用する場合

改定前の運賃に $\frac{110}{108}$ を乗じ，$\underset{\text{B}}{\underline{\text{10円未満の端数を切り上げ}}}$，10円単位とした額を新運賃とする。

ここで，

下線部Aの「1円未満の端数を切り捨て」とは，

「計算した値の小数点以下をすべてなくす」ということです。

例えば　1234.5　→　1234　，678.98　→　678　，234　→　234　となります。

下線部Bの「10円未満の端数を切り上げ」とは，

「計算した値の一の位以下が少しでもあれば切り上げる」ということです。

例えば　1234　→　1240　，780.01　→　790　，450　→　450　となります。

改定前の運賃を x 円（$x = 200, 210, 220, \cdots\cdots, 1500$）として，以下の問いに答えなさい。

（1） 400円の運賃は，改定後いくらになるか，ICカードを利用する場合と切符を利用する場合とをそれぞれ求めなさい。

（2） 運賃改定後，ICカードを利用した場合の運賃と切符を利用した場合の運賃が同額となるような改定前の運賃 x をすべて求めなさい。

（3） 切符を利用する場合，20円の値上げとなるような改定前運賃の範囲は何円以上何円以下か求めなさい。

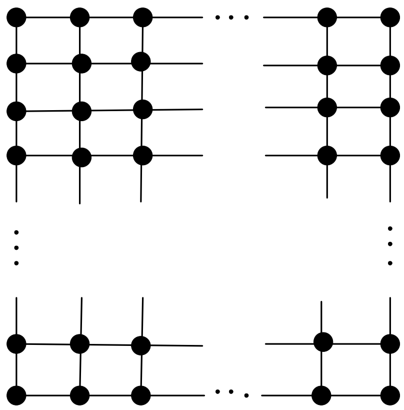
（4） 運賃改定後，ICカードを利用する場合と，切符を利用する場合で運賃の差が最大となるような改定前の運賃 x をすべて求めなさい。

（5） 切符を利用する場合の改定を，10円未満の端数を切り上げるのではなく，10円未満の端数を四捨五入する計算方法に変えたとする。このとき，値上げにならない運賃の範囲は何円以上何円以下か求めなさい。

4　「チューリップ薫る　新たなステージへ」をテーマに、「驚き」「発見」をコンセプトに今年も砺波市で 67 回目のチューリップフェアが盛大に開かれました。700 品種、300 万本のチューリップで園内を彩り、花の大谷やイリュージョンアートガーデン、大花壇の地上絵等、様々なイベントで多くの観光客を盛り上げていました。

（1）【図 1】のようにチューリップを縦 12 ㎝ 間隔，横 15 ㎝ 間隔に並べて正方形の土地に植えます。ただし正方形の 4 つの頂点には必ず植えるものとする。正方形の土地の面積の最小値を求めなさい。

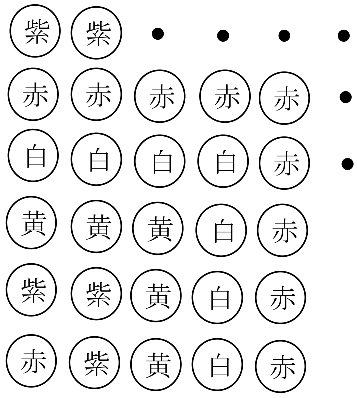
【図 1】



（2）半径が 40 ㎝ の円形の土地にチューリップをできるだけ植えたいと思います。円の中心にチューリップを植えて，そこから 縦 10 cm 間隔，横 10 cm 間隔で植えていきます。何本まで植えることができるか求めなさい。ただし，円周上にはチューリップは植えることができるものとする。

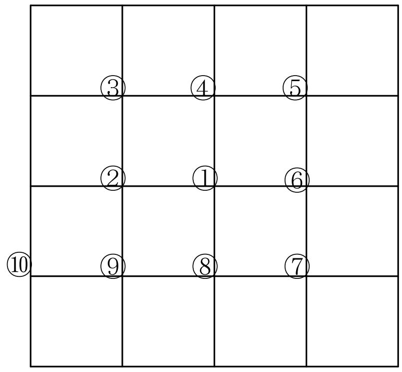
（3）10 ㎝ 間隔で【図 2】のように，赤色，紫色，黄色，白色の4色のチューリップを1辺が 50 m の正方形の花壇に植えていきます。黄色のチューリップは何本必要か求めなさい。

【図 2】



（４）10 ㎝ 間隔で【 図３ 】のように順番にチューリップを植えていきます。ここで①を基準として例えば，②の位置は左10㎝上下0㎝，⑤の位置は右10㎝上10㎝，⑧の位置は左右0㎝下10㎝，と表すことにします。2018 本目の位置を表しなさい。

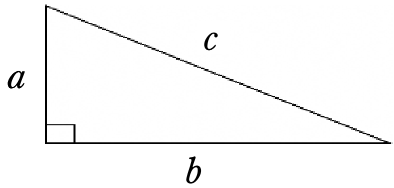
【 図３ 】



$\boxed{5}$ 昨年5月28日，富山県魚津市を中心に「第68回全国植樹祭」が開催されました。植樹によって木の影をできるだけ重ならないようにし，地面を影で覆い尽くすことで，温暖化防止を最低のコストで行うといったコストパフォーマンスの良い植樹方法を考えるという発想は，地球環境問題への数学的アプローチとして注目されています。そのような植樹を考える上で，直角三角形の2辺の比を用いることがあります。「直角を作る」という発想は，非常に有効なのです。

さて，【図1】のような直角三角形について，ピタゴラスの定理（三平方の定理）より，$a^2+b^2=c^2$ が成り立つことが知られています。a，b，c が自然数であるような組 (a, b, c) をピタゴラス数といいます。
例えば，$(3, 4, 5)$ はピタゴラス数です。ピタゴラス数は何組存在するのでしょうか。

【図1】



（1）$a^2+b^2=c^2$ をみたす自然数 a, b, c の組 (a, b, c) を，$(3, 4, 5)$ 以外で a の値が小さい方から2 組求めなさい。
ただし，$a<b$ とする。

ここで，「行列」というものを考えます。$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ のように数を配列して，かっこでくくったものを「行列」といい，数の横の並びを「行」，縦の並びを「列」，行列を構成するおのおのの数を「成分」といいます。

また，$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ や $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ のように，1列だけからなる行列を「列ベクトル」といいます。

【行列の積の計算ルール】

列ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に行列 $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ を左から掛けるという計算は、$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+by+cz \\ dx+ey+fz \\ gx+hy+iz \end{pmatrix}$ のように計算します。

具体例を示すと，$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot1+(-1)\cdot2+1\cdot3 \\ 4\cdot1+2\cdot2+1\cdot3 \\ 9\cdot1+3\cdot2+1\cdot3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ 18 \end{pmatrix}$ です。

また，行列を用いると，連立方程式を1つの等式で表すことができます。例えば，

連立方程式 $\begin{cases} x-\ y+z=1 \\ 4x+2y+z=1 \\ 9x+3y+z=3 \end{cases}$ は，行列を用いると，$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ のように表されます。

ここからは，行列 $P=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 2\\ -2 & -1 & 2\\ -2 & -2 & 3\end{pmatrix}$ を考えます。

（2）ピタゴラス数の列ベクトル $\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$ から，（*）のように行列A，B，Cを作ります。

（*）：Aは列ベクトルの上段の成分，Bは列ベクトルの上･中段の成分，Cは列ベクトルの中段の成分をマイナスにします。

つまり，$A=\begin{pmatrix}-3\\4\\5\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}-3\\-4\\5\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}3\\-4\\5\end{pmatrix}$ です。

このとき，【行列の積の計算ルール】に従い，PA，PB，PC をそれぞれ計算しなさい。

（3）列ベクトル $\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$ にどのような行列を左から掛けることで（2）で計算した 列ベクトルPA，PB，PCが現れるか，それぞれについて答えなさい。

（4）（2）で計算した 列ベクトルPA を S とおきます。このとき，（2）の（*）と同様のルールで S から A'，B'，C' を作り，PA'，PB'，PC' を計算しなさい。

（5）$\begin{pmatrix}-1 & -2 & 2\\ -2 & -1 & 2\\ -2 & -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$ で表される連立方程式を a，b，c について解くことにより，

$P'\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ となる行列 P'を求めなさい。

（6）ピタゴラス数の列ベクトル $\begin{pmatrix}33\\56\\65\end{pmatrix}$ について，$\begin{pmatrix}-1 & -2 & 2\\ -2 & -1 & 2\\ -2 & -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}33\\56\\65\end{pmatrix}$ となる列ベクトル $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ を求めなさい。

（7）①（1）と（2）と（4）から予想できることを述べなさい。

②（6）から予想できることを述べなさい。