とやま科学オリンピック 2021

高校（数学）問題

2021 年 8 月 4 日（水）

時間：　9 時 30 分～12 時 00 分（150 分）

注 意 事 項

１．指示があるまで、問題冊子を開かないで、以下の注意事項をよく読むこと。
２．参加番号を解答用紙の決められた欄（らん）に記入してください。
３．問題は１ページから９ページにわたって印刷してあります。
４．解答はすべて解答用紙に記入し、解答用紙だけを提出すること。
５．解答用紙は５枚あります。
６．参加番号を解答用紙の決められた欄に記入すること。
７．途中で気分が悪くなった場合や、トイレに行きたくなった場合は、すぐに申し出ること。

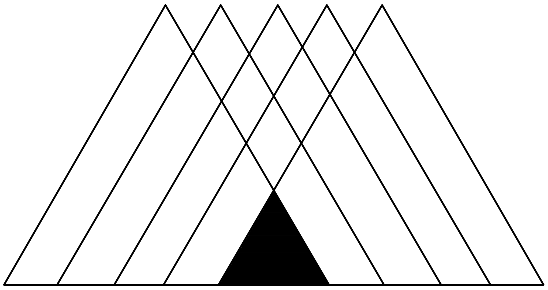
みなさんの健闘（けんとう）を期待しています。

富山県　　富山県教育委員会

このページに　問題はありません

$\boxed{1}$　富山が誇る立山連峰は，冬になれば雪化粧をほどこし，大変見事な情景を私たちに見せてくれます。その姿は山々が幾重にも重なり，大変美しい景観です。また，立山連峰と富山湾を見て方角を知ることができます。さらに詳しく，山々がどのように重なって見えるのかによって，自分が今どこにいるのか算出することもできます。

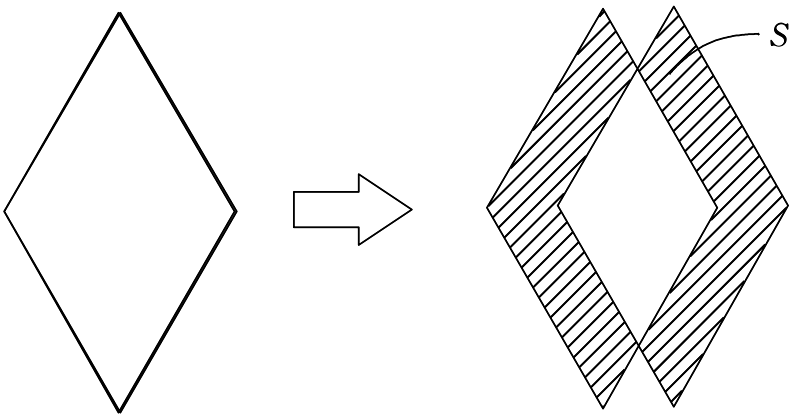
一辺が 6 cm の正三角形の紙を，下の図のように左から 1 cm ずつずらしながら 5 枚重ねたときを考える。例えば，紙がちょうど 5 枚重なった部分を黒く塗ると以下のようになる。



（1）ちょうど 2 枚重なっている部分はどこか。解答用紙の図に斜線を書いて示しなさい。

（2）ちょうど 3 枚重なっている部分の面積の和を求めなさい。

次に，一辺が 6 cm の正三角形の紙 2 枚を上下に合わせ，ひし形になるように置く。このひし形を下の図のようにもう一枚上に重ね，右方向へ x cm 平行移動させたとき，重なっていない部分の面積を S とする。



（3）$x=3$ のときの S を求めよ。

（4）$S=54$ となるときの x の値を求めよ。

（5）重なっていない部分と重なっている部分の面積が等しくなるときの x の値を小数第 2 位まで求めよ。

$\boxed{2}$ 富山売薬は元禄のころに，富山藩二代藩主の前田正甫(まさとし)によって始められたとされています。食あたりや腹痛などに特効のある反魂丹は有名です。しかし，この反魂丹は処方があれば誰にでも手軽に作れる薬というわけではなく，十数種の薬材を薬研(やげん)などで粉末状にし，目の粗さが異なるふるいを使いわけ，不要物や大きなものを取り除くなど，作業工程は多く，製薬のための用具もたくさん必要でした。

ふるいと言えば，素数を発見する方法として，自然数の中から合成数を取り除く「エラトステネスのふるい」があります。素数は1と自分自身以外に約数をもたない1以外の自然数です。この素数の並びは不規則であり，すべての素数を表す数式は今のところ発見されていません。

Aくんは自然数nについて，n以下の素数を見つける方法を先生と考えてみることにしました。

以下，xをこえない最大の整数を$[x]$で表す。例えば，$[1.4]=1$，$[\sqrt{5}]=2$，$[\pi]=3$，$[-1.7]=-2$である。

Aくん：$n=20$のとき，2，3，5，…… と数えていくと，n以下の素数は（　ア　）個ですね。しかし，nが大きくなっていくと，1つずつ数えていくのは大変です。nが大きくなったときはどうなるのでしょう？

先生：指定されたn以下の自然数にある素数を発見する方法に「エラトステネスのふるい」があるよ。これを$n=80$で試してみよう。 方法は次のとおりです。

【方法】

① 図1のように，整数を小さい順に1からnまで並べた表を作る。

② 図2のように①の表を使って，1は素数ではないので，斜線で消す。最小の数である2に〇をつけ，その2の倍数を斜線で消す。

③ 図3のように残った数で最小の数である3に〇をつけ，その3の倍数を斜線で消す。以降は残った最小の数pに〇をつけ，そのpの倍数を斜線で消す。

④ $p \leqq [\sqrt{n}]$である間，③を繰り返す。

⑤ 表中の残っている数すべてに〇をつける。

$[\sqrt{80}]=$（　イ　）なので，（　イ　）以下の素数までこれを繰り返せばよいですね。

Aくん：おもしろいですね。ところで，どうして④は$p \leqq [\sqrt{n}]$である間だけなのですか？すべて調べなくても良いのですか？

先生：いいところに気づいたね。実際に，（　イ　）より大きい最小の素数の倍数を考えてみてください。

Aくん：あ！（　イ　）より大きい最小の素数の倍数を斜線で消そうとしたら，全部消えてます。偶然ですか？

先生：これは偶然じゃないよ。今度は$n=200$のときで考えてみよう。

（1）（　ア　）（　イ　）に適当な数を入れよ。

（2）$n=200$のとき，「エラトステネスのふるい」を用いて表を完成させて，すべての素数の個数を求めよ。

（3）$n=200$ のとき，となる理由を説明せよ。

（4）991，9991はそれぞれ素数であるか，**上記のことを踏まえて**判断せよ。また，判断した理由も答えよ。

図1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80

図2

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	9	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	15	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
21	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	27	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	33	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	39	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	45	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
51	~~52~~	53	~~54~~	55	~~56~~	57	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	63	~~64~~	65	~~66~~	67	~~68~~	69	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	75	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~

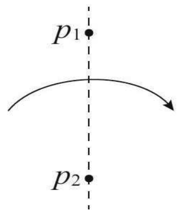
図3

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	15	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
21	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	27	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	33	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	39	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	45	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
51	~~52~~	53	~~54~~	55	~~56~~	57	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	63	~~64~~	65	~~66~~	67	~~68~~	69	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	75	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~

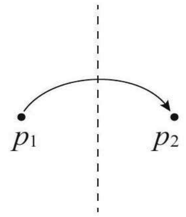
$\boxed{3}$ 一枚の紙から美しい花やかわいい動物などを折り出せる折り紙は，日本に古くから伝わる文化としてたくさんの人々に親しまれてきました。この折り紙の技術は，作図問題に生かすことができます。

以下の A1～A7 は折り紙で可能な作図操作である。

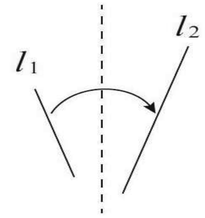
A1．与えられた 2 点を通る線で折る。



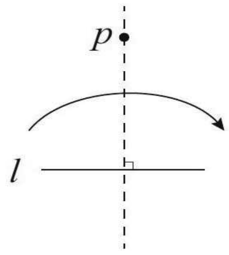
A2．与えられた 2 点を重ねるように折る。



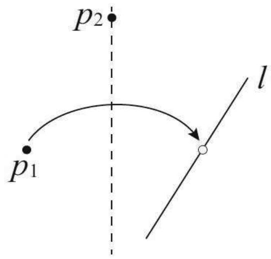
A3．与えられた 2 直線を重ねるように折る。



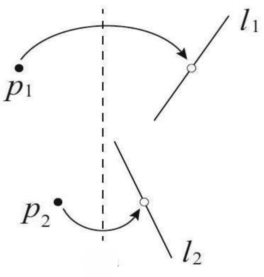
A4．与えられた 1 点 p と直線 l について，p を通る l の垂線を折る。



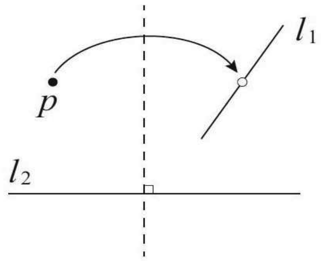
A5．与えられた 2 点 p_1，p_2 と直線 l について，p_2 を固定し p_1 を l 上に重ねるように折る。



A6．与えられた 2 点 p_1，p_2 と 2 直線 l_1, l_2 について，p_1 を l_1 上に，p_2 を l_2 上に重ねるように折る。

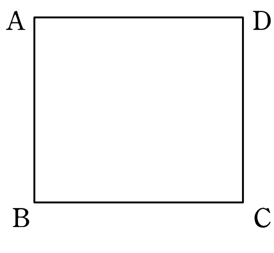


A7．与えられた点 p と 2 直線 l_1，l_2 について，p を l_1 上に重ねて，l_2 の垂線を折る。

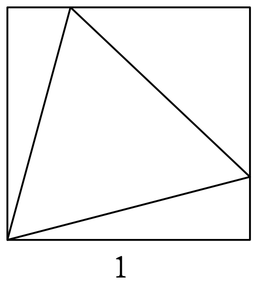


A6 以外の操作は，定規とコンパスで作図することと互換性のある操作である。

（1）下図の正方形の紙を折って，その内部に 1 辺が BC の正三角形PBCを作る。頂点 P を決める折り方の手順を，図に折り目を記入し言葉で説明しなさい。また，△PBC が正三角形になることも説明しなさい。



（2）一辺の長さ 1 の正方形の折り紙を折って，できるだけ大きい正三角形を作る。正方形に内接する正三角形のうち，面積が最大のものは右図のようになる。この正三角形が最大であることを説明しなさい。解答には、解答用紙の図を用いて説明してもよい。



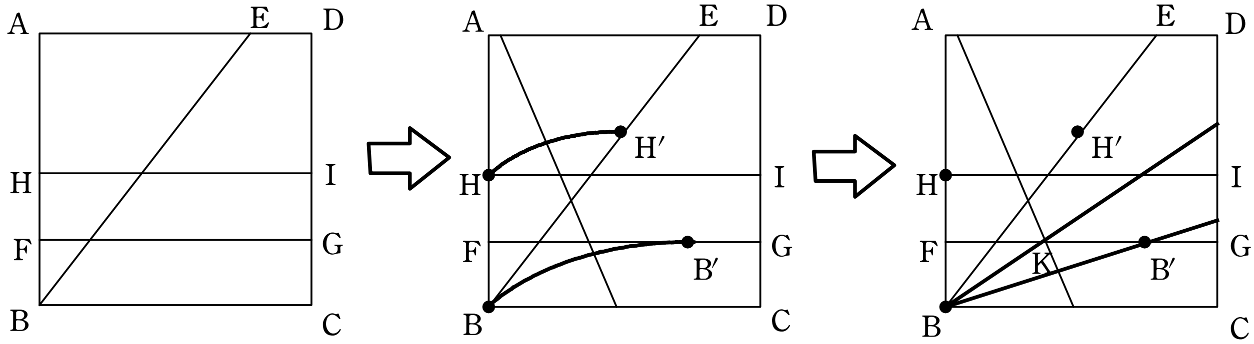
ギリシャ 3 大作図問題の 1 つに「角の三等分問題」があります。紀元前から多くの数学者が取り組み，18 世紀末に「ユークリッド幾何学の**定規とコンパスだけでは**任意の角の三等分は不可能である」ことが証明されています。しかし，**折り紙を用いると**角の三等分をすることができます。A6 の作図操作が鍵になっており，一折りで折ることのできる折り紙の作図操作のうち，最も込み入った折り方であると同時に，折り紙による作図と定規とコンパスによる作図との違いをもたらすものです。

正方形 ABCD があるとして，辺 AD または CD 上に点 E をとる。∠EBC の三等分線を織り込む手順として次のものが有名である。

① 辺 AD と辺 BC を重ねて折り目をつける。そして，下から $\frac{1}{4}$ の位置に折り目をつける。それらを辺 BC に近い方から順に，線分 FG，HI と名付ける。（辺 AB 上に点 F，H があり，辺 CD 上に点 G，I がある。）

② 点 H を直線 BE 上に，点 B を直線 FG 上に重ねて折り目をつける。折った後，点 H，B がそれぞれ点 H′，B′ に移るとする。

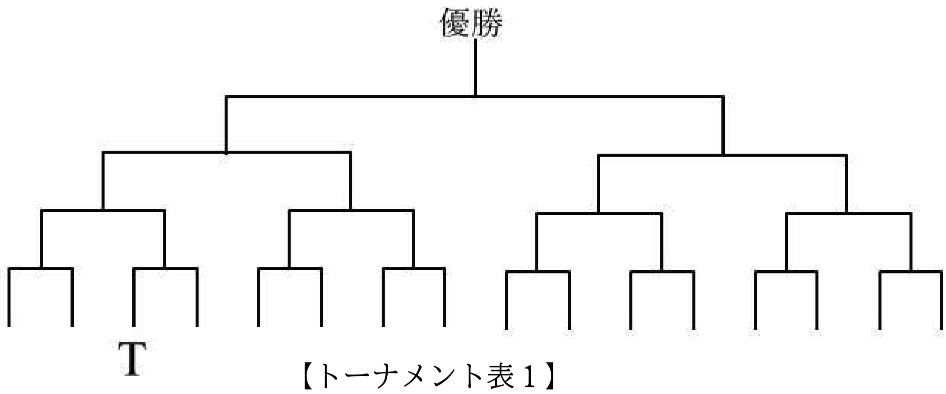
③ 線分 H′B′ の垂直二等分線を折る。この折り目は点 B を通り，この折り目および半直線 BB′ が求める三等分線である。



（3）上の手順で折り紙を折ってみよう。そして，作図された折り目が角を三等分することを証明しなさい。ただし，線分H′B′の垂直二等分線と直線FGとの交点をKとする。

$\boxed{4}$ 富山県の高校野球史上，旋風を巻き起こしたチームは昭和 33 年全国高校野球選手権大会準々決勝で延長 18 回引き分け再試合を演じた魚津高校と，昭和 61 年選抜高校野球大会でベスト４に進出した新湊高校がその双璧であり，現在でも語り継がれています。高校野球はトーナメント方式で行われます。ここで県内の高校野球チーム 16 校がトーナメント方式で試合を行い，優勝校を決める大会を考えます。

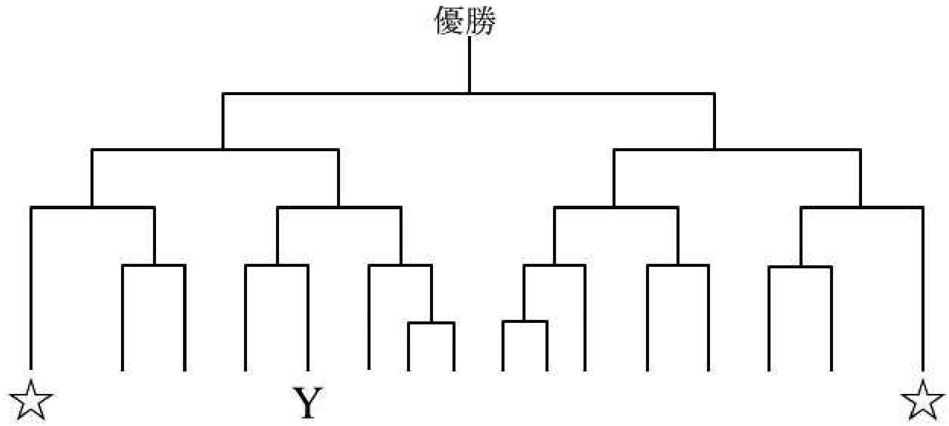
下記の【トーナメント表１】に関して，各チームの実力は互角である。ただし，引き分けはないものとする。以下の設問に答えなさい。



【トーナメント表１】

（１）T 校が優勝する確率を求め，既約分数で表しなさい。

次に【トーナメント表２】に関して，☆ 印のついた学校はシード校であり，シード校同士，ノーシード校同士の実力は互角であり，シード校とノーシード校が対戦した場合，シード校が勝利する確率は $\frac{2}{3}$ である。ただし，引き分けはないものとする。以下の設問に答えなさい。

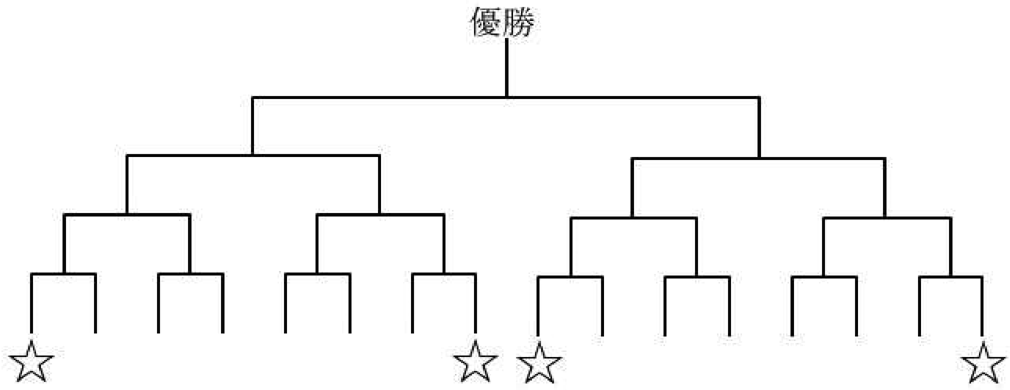


【トーナメント表２】

（２）Y 校が優勝する確率を求め，既約分数で表しなさい。
（３）シード校が優勝する確率を求め，既約分数で表しなさい。

次に【トーナメント表３】に関して，前問と同様 ☆ 印のついた学校はシード 校であり，シード校同士，ノーシード校同士の実力は互角であり，シード校とノーシード校が対戦した場合，シード校が勝利する確率は $\frac{2}{3}$ である。ただし，引き分けはないものとする。

以下の設問に答えなさい。



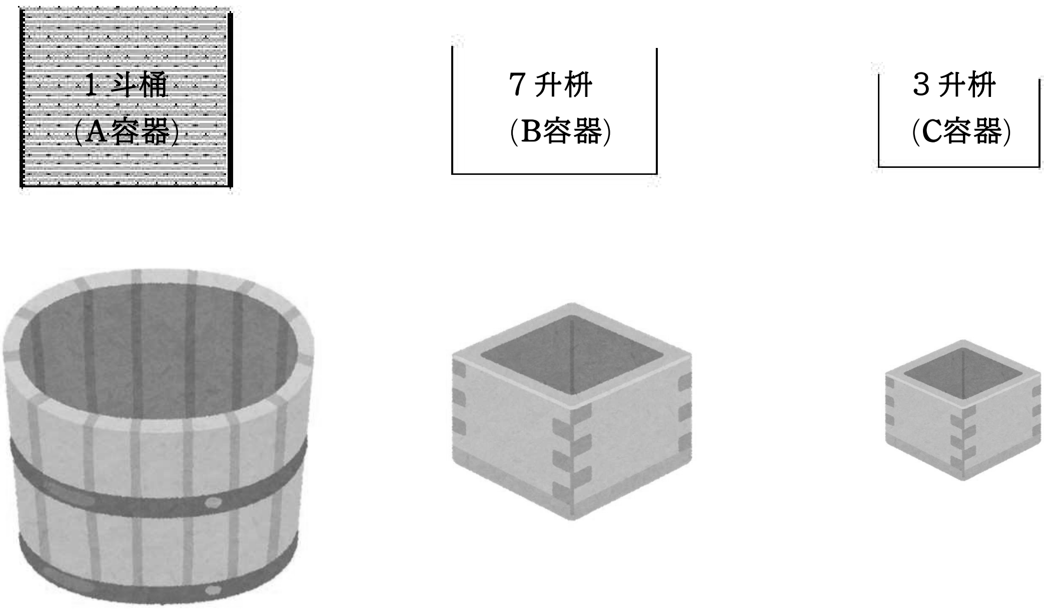
【トーナメント表３】

（４）シード校が少なくとも1チーム**準決勝に進む(2回勝つ)**確率を求め，既約分数で表しなさい。

5　江戸時代，吉田光由が寛永４年（1627年）に執筆した和算書の『塵劫記（じんこうき）』があります。命数法や単位，掛け算九九などの基礎的な知識のほか，面積の求め方などの算術を身近な話題をもとに解説し，これ一冊で当時の日常生活に必要な算術全般をほぼ網羅できる内容となっています。昔の数学の教科書のようなものです。その中の問題です。

（１）下図に示すような１斗桶（おけ）の中に最初に油が１斗(10 升)入っている。この 10 升の油を７升枡（ます）と３升枡を使って，きっちりと５升ずつに二分するにはどうすればよいか考える問題である。油の移動の回数が一番少なくて済むように考 えると，1回目には１斗桶から７升枡に油を移すとよいことが分かった。この続きを（**下表の1回目の例のように**）考え，解答用紙の表を完成させなさい。

（注）１升は 約 1.8 リットルです。 1 斗桶，７升枡，３升枡はそれぞれ10 升，７升，３升を計ることのみ利用可とする。

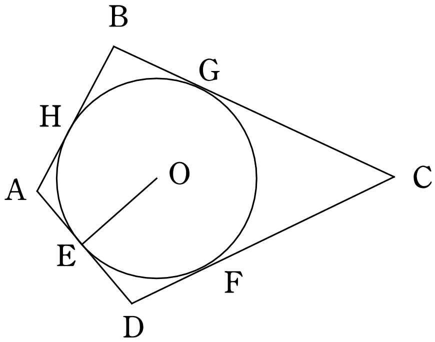


回	A容器	B容器	C容器	油の移動
0	10	0	0	最初の状態
1	**3**	**7**	**0**	**A　から　B　へ**
2				から　　　へ

江戸末期の富山県では，石黒信由が和算をはじめ暦法・天文・測量術・航海術など多方面で活躍していました。また，その時代に「算額」というものが流行っていました。算額とは，和算独特の風習で，数学の問題が解けたことに感謝し，その問題と答えを額に表し神社仏閣に奉納した額のことです。石黒信由は，その算額を射水市放生津八幡宮に奉納しています。その問題を解いてみましょう。

石黒信由編「算学鉤致」巻之下（部分）　一般財団法人高樹会　蔵

（２）四角形ABCDに内接する円がある。辺AB，BC，CD，DAと接する点をH，G，F，Eとし，中心をOとする。AE＝AH＝ a ，BG＝BH＝ b ，CF＝CG＝ c ，DE＝DF＝ d とするとき，内接する円の半径 r を a ， b ， c ， d を用いて表しなさい。



この問題には様々な解き方が存在するが，三角関数や三角比を用いずに解く場合は，以下の定理Aを使用してもよい。（証明は可能だが不要）

（定理A）
△ABCに円Oが内接しているとき，３頂点A,B,Cからの接線の長さを それぞれ s , t , u とすると，$r^2(s+t+u)=stu$ が成り立つ。ただし，内接円Oの半径を r とする。