

とやま科学オリンピック **2021**

(高校部門)

解答例および解説

数学 P. 1

物理 P. 14

化学 P. 28

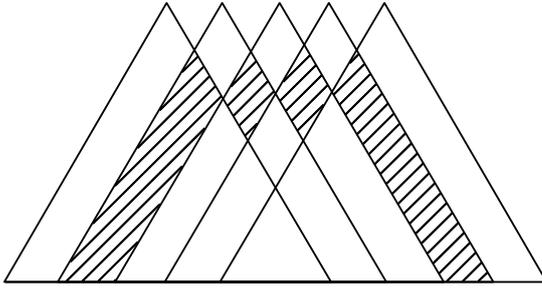
生物 P. 38

2021年8月4日(水)

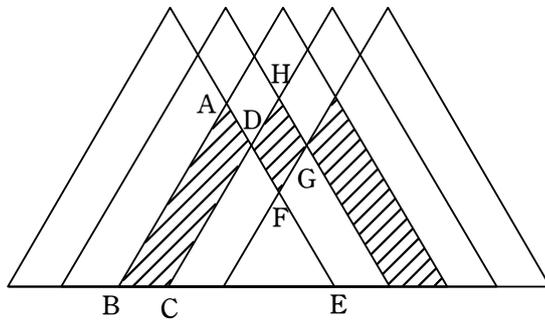
富山県 富山県教育委員会

1 【出題の意図】物体の動きをイメージし、現象を関数的に考え、正しい数式の処理ができるかを問う問題。

(1)



(2)



台形 ABCD の面積は $\triangle ABE - \triangle DCE$ である。

$\triangle ABE$ は一辺が 4 cm の正三角形なので、面積は $\frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

$\triangle DCE$ は一辺が 3 cm の正三角形なので、面積は $\frac{1}{2} \times 3 \times \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$

よって、台形 ABCD の面積は $4\sqrt{3} - \frac{9\sqrt{3}}{4} = \frac{7\sqrt{3}}{4}$

右側の台形も同じ面積 $\frac{7\sqrt{3}}{4}$ である。

ひし形 DFGH の面積は、一辺が 1 cm の正三角形の 2 つ分であるので、

面積は $\frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

以上より、求める面積は

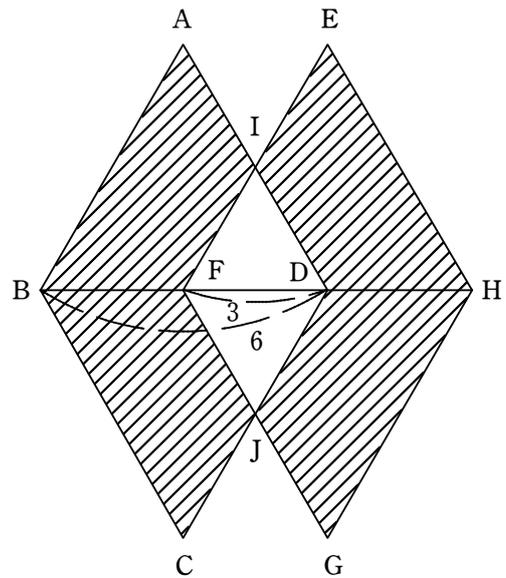
$$\frac{7\sqrt{3}}{4} \times 2 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{16\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

(3) 台形 ABFI の面積は $\triangle ABD - \triangle IFD$ である。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \times 6 \times 3\sqrt{3} - \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ &= 9\sqrt{3} - \frac{9\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{27\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

この図形の 4 つ分であるので、

$$S = \frac{27\sqrt{3}}{4} \times 4 = 27\sqrt{3} \text{ cm}^2$$



(別解)

ひし形 2 個分の面積は一辺が 6 の正三角形の 4 個分に

$$\text{相当するので, } \frac{1}{2} \times 6 \times 3\sqrt{3} \times 4 = 36\sqrt{3} \quad \dots \textcircled{1}$$

重なっている部分の面積は一辺が 3 の正三角形の 2 個分に

$$\text{相当するので, } \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{3\sqrt{3}}{2} \times 2 = \frac{9\sqrt{3}}{2} \quad \dots \textcircled{2}$$

よって、求める面積は $\textcircled{1} - \textcircled{2} \times 2$ であるから

$$36\sqrt{3} - \frac{9\sqrt{3}}{2} \times 2 = 27\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

(4) x cm 進んだときの面積 S は (3) と同様に考えると

$$\begin{aligned} S &= \left\{ \frac{1}{2} \times 6 \times 3\sqrt{3} - \frac{1}{2} \times (6-x) \times \frac{(6-x)\sqrt{3}}{2} \right\} \times 4 \\ &= \left\{ 9\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} (6-x)^2 \right\} \times 4 \\ &= 36\sqrt{3} - \sqrt{3} (6-x)^2 \\ &= -\sqrt{3} x^2 + 12\sqrt{3} x \end{aligned}$$

$S = 54$ のとき

$$-\sqrt{3} x^2 + 12\sqrt{3} x = 54 \text{ を解いて}$$

$$x^2 - 12x + 18\sqrt{3} = 0$$

解の公式より

$$\begin{aligned} x &= 6 \pm \sqrt{36 - 18\sqrt{3}} \\ &= 6 \pm 3\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} \\ &= 6 \pm 3(\sqrt{3} - 1) \\ &= 6 \pm (3\sqrt{3} - 3) \\ &= 3 + 3\sqrt{3}, \quad 9 - 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

題意より $0 \leq x \leq 6$ であるから $x = 9 - 3\sqrt{3}$ cm

(5) 対称性から、上半分の図形で条件を満たす x の値を考えればよい。

台形 ABFI の面積 $\times 2 = \triangle IFD$ の面積となれば良い。

台形 ABFI の面積 $\times 2$

$$\left\{ \frac{1}{2} \times 6 \times 3\sqrt{3} - \frac{1}{2} \times (6-x) \times \frac{(6-x)\sqrt{3}}{2} \right\} \times 2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$\triangle IFD$

$$\frac{1}{2} \times (6-x) \times \frac{(6-x)\sqrt{3}}{2} \quad \dots \textcircled{2}$$

よって、 $\textcircled{1} = \textcircled{2}$ を解くと

$$18\sqrt{3} - \frac{(6-x)^2\sqrt{3}}{2} = \frac{(6-x)^2\sqrt{3}}{4}$$

$$72\sqrt{3} - 2\sqrt{3}(6-x)^2 = (6-x)^2\sqrt{3}$$

$$3\sqrt{3}(6-x)^2 = 72\sqrt{3}$$

$$(6-x)^2 = 24$$

$$6-x = \pm 2\sqrt{6}$$

$$x = 6 \pm 2\sqrt{6}$$

題意より $0 \leq x \leq 6$ であるから $x = 6 - 2\sqrt{6}$

ここで、 $\sqrt{6}$ は

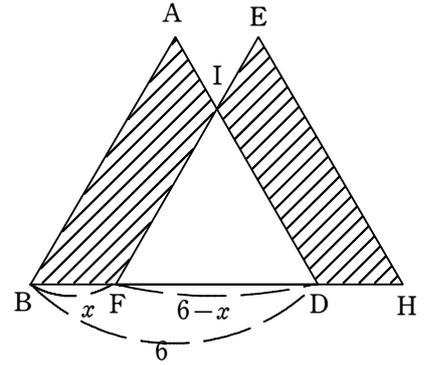
$$2.44 \times 2.44 = 5.9536$$

$$2.45 \times 2.45 = 6.0025$$

$$2.46 \times 2.46 = 6.0516$$

であるので、 $x = 6 - 2\sqrt{6}$

$$\doteq 6 - 2 \times 2.45 = 1.10 \text{ cm}$$



2 【出題の意図】 エラトステネスのふるいは、 n 以下の自然数について素数をふるい分けるというアルゴリズムで、古代ギリシャの科学者であるエラトステネスが考案したとされている。例えば、自然数 n が素数であるか判断するには、 n 以下の素数で割り切れるものがあるか計算する必要があるが、このエラトステネスのふるいを用いると必要な計算量を減らすことができる。このはるか昔に考えられた方法をもとに、素数という不思議な数について触れる機会をもってもらおうと思い、出題した。

(.) 20 以下の素数は 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 で、8 個である。

よって、(ア) = 8

また、 $64 < 80 < 81$ より、 $8 < \sqrt{80} < 9$ である。つまり、 $[\sqrt{80}] = 8$ となる。

よって、(イ) = 8

(.) $196 < 200 < 225$ より、 $14 < \sqrt{200} < 15$ である。つまり、 $[\sqrt{200}] = 14$ となる。

エラトステネスのふるいを用いると、1 ~ 200 までの自然数において、14 以下の素数の倍数、つまり 2, 3, 5, 7, 11, 13 の倍数を消していけばよい。

結果は以下の表のようになり、46 個である。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	181	182	183	184	185	186	187	188	189	190
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200

(3) $[\sqrt{200}] = 14$ である。14 以下の素数は 2, 3, 5, 7, 11, 13 より、その次の素数である 17 について考える。 k を自然数とすると、17 の倍数は $17 \times k$ という形をしているので、この数は 17 の倍数であり、 k の倍数でもある。 $k < 17$ のときの $17k$ について、 $17 \times 2, 17 \times 3, 17 \times 4, 17 \times 5, 17 \times 6, 17 \times 7, 17 \times 8, 17 \times 9, 17 \times 10, 17 \times 11, 17 \times 12, 17 \times 13, 17 \times 14, 17 \times 15, 17 \times 16$ はすでに調べてあり、 $17 \times 12 > 200$ であるから、表の中では 17×1 には \bigcirc が、 17×11 までの数は斜線で消されている。

また、17 より大きい 17 の倍数で斜線で消えていない数があったとしたら、 $17 \times 17, 17 \times 19$ のような数であり、17 以上の自然数 K を用いて、 $17 \times K$ で表すことができる。しかし、 $K \geq 17$ であるとしたら、 $17 \times K \geq 17 \times 17 > 200$ となり、 $17 \times K$ は表の中の数字ではない。

よって、200 以下の自然数にある素数を発見するとき、14 以下の素数まで「エラトステネスのふるい」を行うと、17 の倍数はすべて調べてあることになり、14 以下の素数で最大である 13 の倍数まで調べればよい。

- (4) $961 < 991 < 1024$ より, $31 < \sqrt{991} < 32$ である。つまり, $[\sqrt{991}] = 31$ となる。
よって, (3) より, 991が31以下の素数である2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31の
倍数であるか調べればよいが, どの数で割っても991は割り切れない。
つまり, 991は素数である。

同様に $9801 < 9991 < 10000$ より, $99 < \sqrt{9991} < 100$ である。つまり, $[\sqrt{9991}] = 99$
となるから, 99以下の素数の倍数であるかどうか調べればよい。このとき, 素数 97 について,

$$9991 = 97 \times 103$$

となり, 9991 は 97 の倍数であるから, 素数ではない。

(別解)

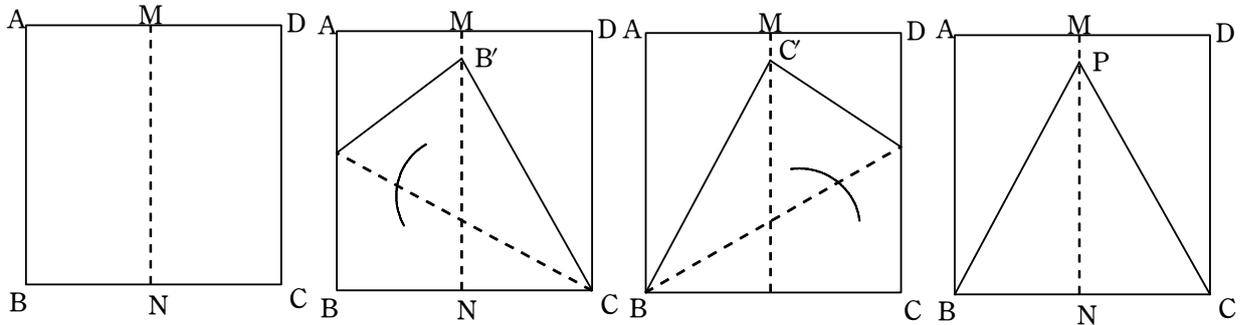
$$9991 = 10000 - 9$$

$$= 100^2 - 3^2 = (100 + 3)(100 - 3) = 103 \times 97$$

が成り立つので, 9991は素数ではない。

3 【出題の意図】折り紙の技術は作図問題に生かすことができ、定規やコンパスを使うより簡単に作図ができたりもする。そして、折り紙の威力を一番実感できるのがギリシャ3大作図問題の「角の三等分線問題」と「立方倍積問題」である。「角の三等分問題」を実際に折り紙を折って考えてもらいたい。

(1) 【例1】

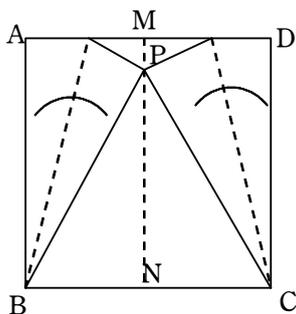


まず、辺 AB と辺 DC を重ねて折り目をつけ、それを直線 MN と名付ける。

次に、点 C を固定し、点 B を直線 MN に重ねるように折る。この点を B' とすると、 $BC = B'C$ 。

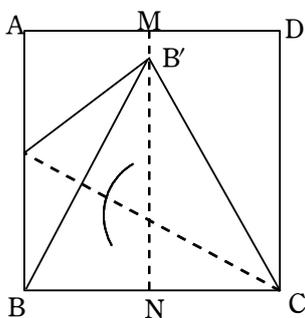
さらに、点 B を固定し、点 C を直線 MN に重ねるように折る。この点を C' とすると、 $BC = BC'$ となり、点 B' と点 C' は対称性より一致し、この点を P とする。以上より、 $BC = BP = CP$ となるので正三角形ができあがる。

【例2】



直線 MN 上に頂点 A, D がのるように移す。対称性によりこれらは一致し、一致した点を P とする。 $BC = PB = PC$ となり、正三角形ができあがる。

【例3】



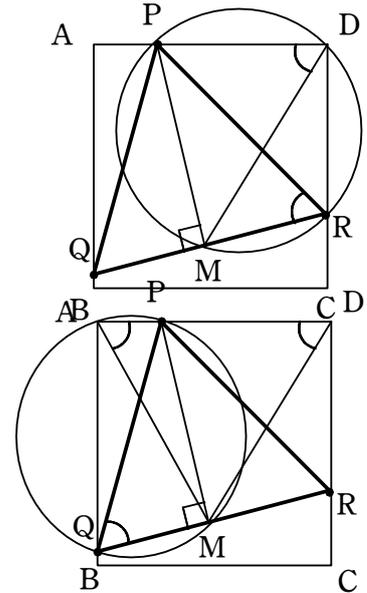
$B'C = 2CN$, $\angle B'NC = 90^\circ$ より

$\angle B'CN = 60^\circ$

$B'C = BC$ より $\angle CBB' = \angle CB'B = 60^\circ$

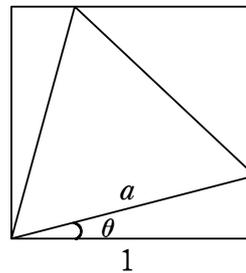
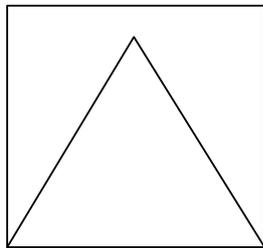
よって、正三角形ができあがる。

(2) 正三角形 PQR の頂点について、P は AD 上、Q が AB 上、R が CD 上であるとする。
 QR の中点を M とすると、 $\angle PDR = \angle PMR = 90^\circ$ より、
 4点 P, D, R, M が同一円周上にある。
 したがって、 $\angle PDM = \angle PRM = 60^\circ$
 同様に、 $\angle PAM = 60^\circ$
 ゆえに、辺 QR の中点 M は定点であり、それは $\triangle AMD$ が
 正三角形となる点である。
 したがって、M を通る QR の長さの最大値を求めればよい。
 最大値は Q が B に一致するか、R が C に一致するときである。



正三角形が最大になるとき、正方形の頂点と1点を共有するので、次のように説明してもよい。

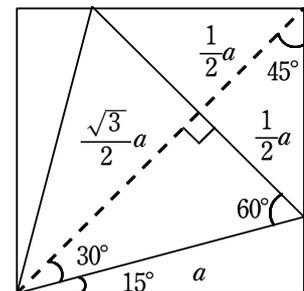
(1) で示した解答では、正三角形の辺の長さは正方形の辺の長さと等しい。この正三角形を、左下の点を中心として反時計回りに少し回転すると正方形の内側に収めたまま辺を長くすることができる。したがって、正方形に内接する、より大きな正三角形をつくることが可能である。



一辺の長さ a の正三角形の面積を S とすると $S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$

$\cos \theta = \frac{1}{a}$ より $a = \frac{1}{\cos \theta}$ であるから、 $S = \frac{\sqrt{3}}{4 \cos^2 \theta}$

ここで、 $0^\circ \leq \theta \leq 15^\circ$ であり、この範囲では $\cos \theta$ は減少関数であるから、 S が最大になるのは $\theta = 15^\circ$ のときである。



このとき、正三角形の一辺の長さ a について考える。

正三角形は、図のように正方形に内接し、正方形の対角線の

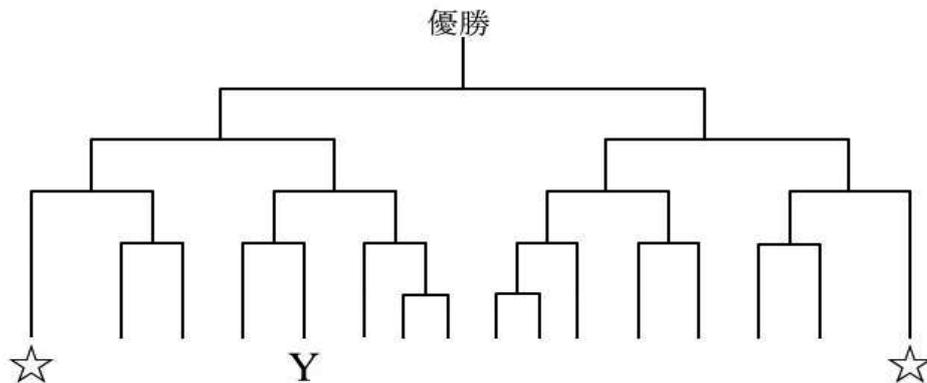
長さについて、 $\frac{\sqrt{3}}{2} a + \frac{a}{2} = \sqrt{2}$ が成り立つから

$$a = \sqrt{6} - \sqrt{2}$$

4 【出題の意図】 確率が身近なスポーツやゲームと密接な関係があることを知ってもらうこと、および与えられた問題に対して確率の基本的な性質である加法定理、乗法定理および余事象の定理をどのように応用するかを考えてもらうこと。

(1) T校が優勝する確率は4回連続勝利する必要があるため、 $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$

(2)



【トーナメント表2】

Y校が準決勝に進出する確率は、 $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

Y校の準決勝の相手がシード校となる確率は、 $\frac{2}{3}$

Y校の準決勝の相手がノーシード校となる確率は、 $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

であるから、Y校が決勝に進出する確率は、

$$\frac{1}{4} \times \left\{ \frac{2}{3} \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \right\} = \frac{1}{4} \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4} \times \left(\frac{2}{9} + \frac{1}{6} \right) = \frac{7}{72}$$

Y校が決勝に進出した場合、決勝戦の相手がシード校となる確率は、 $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$

決勝戦の相手がノーシード校となる確率は、 $1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$

よって、Y校が優勝する確率は、

$$\frac{7}{72} \left(\frac{4}{9} \times \frac{1}{3} + \frac{5}{9} \times \frac{1}{2} \right) = \frac{7}{72 \times 9} \left(\frac{4}{3} + \frac{5}{2} \right) = \frac{7}{72 \times 9} \times \frac{23}{6} = \frac{161}{3888}$$

(3) 【トーナメント表2】の左側のブロックにおいて、シード校が決勝に進出する確率は、

$$\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

ノーシード校が決勝に進出する確率は、 $1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$ である。

同様に【トーナメント表2】の右側ブロックにおいてシード校が決勝に進出する確率は、

$$\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

ノーシード校が決勝に進出する確率は、 $1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$ である。

すなわち、決勝戦でシード校が優勝するためには少なくともシード校が1チーム決勝に進出する必要があることから、シード校が優勝する確率は、以下の3パターンとなる。

- ① 左ブロック：シード校 右ブロック：シード校
- ② 左ブロック：シード校 右ブロック：ノーシード校
- ③ 左ブロック：ノーシード校 右ブロック：シード校

$$\textcircled{1} P_1 = \left(\frac{4}{9}\right) \times \left(\frac{4}{9}\right) = \frac{16}{81}$$

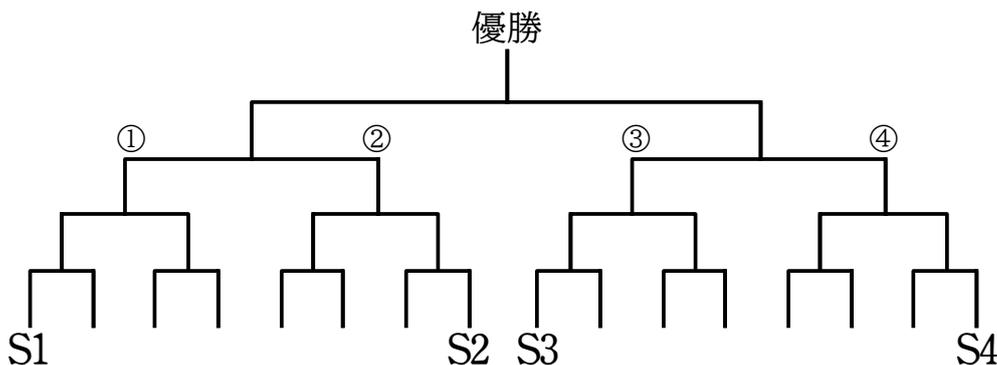
$$\textcircled{2} P_2 = \left(\frac{4}{9}\right) \times \left(1 - \frac{4}{9}\right) = \frac{4}{9} \times \frac{5}{9} = \frac{20}{81}$$

$$\textcircled{3} P_3 = \left(1 - \frac{4}{9}\right) \times \left(\frac{4}{9}\right) = \frac{5}{9} \times \frac{4}{9} = \frac{20}{81}$$

したがって、シード校が優勝する確率は

$$P = 1 \times P_1 + \frac{2}{3} \times P_2 + \frac{2}{3} \times P_3 = \frac{16}{81} + 2 \times \frac{2}{3} \times \frac{20}{81} = \frac{16}{81} + \frac{80}{243} = \frac{48 + 80}{243} = \frac{128}{243}$$

(4)



上記のように、シード校をS1, S2, S3, S4 とする。

シード校 S1 が準決勝①に進出する確率は、 $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$

ノーシード校が準決勝①に進出する確率は、 $1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$

同様に、

シード校S2が準決勝②に進出する確率は、 $\frac{4}{9}$ ノーシード校が準決勝②に進出する確率は、 $\frac{5}{9}$

シード校S3が準決勝③に進出する確率は、 $\frac{4}{9}$ ノーシード校が準決勝③に進出する確率は、 $\frac{5}{9}$

シード校S4が準決勝④に進出する確率は、 $\frac{4}{9}$ ノーシード校が準決勝④に進出する確率は、 $\frac{5}{9}$

よって、①～④の準決勝にすべてがノーシード校で埋まる確率は、 $\left(\frac{5}{9}\right)^4 = \frac{625}{6561}$

したがって、①～④に少なくとも1チームシード校が勝ち進む確率は、

$$1 - \frac{625}{6561} = \frac{5936}{6561}$$

- 5 【出題の意図】 江戸時代の算術に触れてもらう。その当時、石黒信由によって富山県に算額が奉納された神社がある。その問題を実際に解くことで、先祖の人々の知恵や学習に対する深い思いを知る。

(1)

回	A容器	B容器	C容器	油の移動
0	10	0	0	最初の状態
1	3	7	0	A から B へ
2	3	4	3	B から C へ
3	6	4	0	C から A へ
4	6	1	3	B から C へ
5	9	1	0	C から A へ
6	9	0	1	B から C へ
7	2	7	1	A から B へ
8	2	5	3	B から C へ
9	5	5	0	C から A へ

- (2) $\angle AOE = \angle AOH = \alpha$, $\angle BOG = \angle BOH = \beta$, $\angle COF = \angle COG = \gamma$,
 $\angle DOE = \angle DOF = \delta$ とすると $2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta = 2\pi$ から
 $\alpha + \beta + \gamma + \delta = \pi$ $\tan \pi = 0$ より $\tan(\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 0$

$$\tan(\alpha + \beta + \gamma + \delta) = \frac{\tan(\alpha + \beta) + \tan(\gamma + \delta)}{1 - \tan(\alpha + \beta)\tan(\gamma + \delta)} = 0$$

分子が0になるので $\tan(\alpha + \beta) + \tan(\gamma + \delta) = 0$ ……①

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}, \quad \tan(\gamma + \delta) = \frac{\tan \gamma + \tan \delta}{1 - \tan \gamma \tan \delta}$$

ここで, $\tan \alpha = \frac{a}{r}$, $\tan \beta = \frac{b}{r}$, $\tan \gamma = \frac{c}{r}$, $\tan \delta = \frac{d}{r}$ だから

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\frac{a}{r} + \frac{b}{r}}{1 - \frac{a}{r} \frac{b}{r}} = \frac{r(a+b)}{r^2 - ab}, \quad \tan(\gamma + \delta) = \frac{\frac{c}{r} + \frac{d}{r}}{1 - \frac{c}{r} \frac{d}{r}} = \frac{r(c+d)}{r^2 - cd}$$

$$\text{①より} \quad \frac{r(a+b)}{r^2 - ab} + \frac{r(c+d)}{r^2 - cd} = 0$$

$$(r^2 - cd)(a+b) + (r^2 - ab)(c+d) = 0$$

$$r^2(a+b+c+d) = abc + abd + acd + bcd$$

$$r^2 = \frac{abc + abd + acd + bcd}{a+b+c+d}$$

$$r = \sqrt{\frac{abc + abd + acd + bcd}{a+b+c+d}} = \sqrt{\frac{abcd}{a+b+c+d} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right)}$$

(別解)

右の図のように、線分BA, CDを延長し、交点をPとする。

また、△PADに内接する円について、辺PA, PD, ADとの交点をそれぞれQ, R, Sとする。

また、四角形ABCDに内接する円の中心と半径をそれぞれO, r,

△PADに内接する円の中心と半径をそれぞれO', r' とする。

PQ = x, QA = y, RD = z とすると、PH = PFより、

$$x + y + a = x + z + d \quad \dots \textcircled{1}$$

また、辺ADにおいて、

$$AD = SA + SD$$

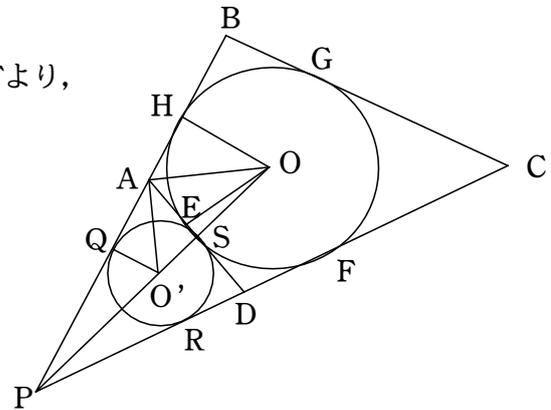
$$SA = QA = y, \quad SD = RD = z,$$

$$AD = AE + ED$$

$$AE = AH = a, \quad DE = DF = d,$$

$$y + z = a + d \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{より}, \quad y = d, \quad z = a$$



また、∠O'AQ = α, ∠OAH = β とすると、

$$\angle QAS = 2\alpha, \quad \angle HAS = 2\beta \text{ であり,}$$

$$2\alpha + 2\beta = 180^\circ \text{ より, } \alpha + \beta = 90^\circ$$

よって、二つの直角三角形O'AQとAOHは相似なので、r' : a = d : r であり、

$$r' = \frac{ad}{r} \quad \dots \textcircled{3}$$

O'からOFに垂線を引き、交点をTとすると

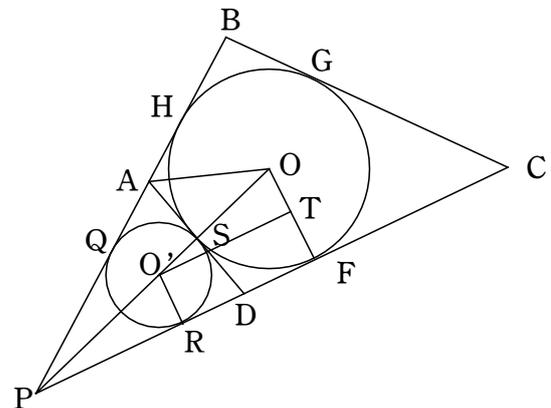
△PRO'と△O'TOは相似であり、

PR : O'T = O'R : OTより、

$$x : (a + d) = r' : (r - r') \text{ であるから, } \textcircled{3} \text{より,}$$

$$x \left(r - \frac{ad}{r} \right) = \frac{ad}{r} (a + d)$$

$$x = \frac{ad(a + d)}{r^2 - ad} \quad \dots \textcircled{4}$$



定理Aより,

$$r^2\{(x+a+d)+b+c\}=(x+a+d)bc \text{ となるので,}$$

$x+a+d$ に④を代入すると

$$x+a+d = \frac{ad(a+d)}{r^2-ad} + a+d = \frac{a^2d+ad^2-a^2b-ad^2+(a+d)r^2}{r^2-ad} = \frac{(a+d)r^2}{r^2-ad} \text{ より,}$$

$$r^2\left\{\frac{(a+d)r^2}{r^2-ad} + b+c\right\} = \frac{(a+d)r^2}{r^2-ad}bc$$

$$r^2\{(a+d)r^2+(b+c)r^2-abd-acd\}=(a+d)bc r^2$$

$$(a+b+c+d)r^2=abc+abd+acd+bcd \text{ であるから,}$$

$$r^2 = \frac{abc+abd+acd+bcd}{a+b+c+d}$$

$$r = \sqrt{\frac{abc+abd+acd+bcd}{a+b+c+d}} = \sqrt{\frac{abcd}{a+b+c+d}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)}$$

(定理Aの証明)

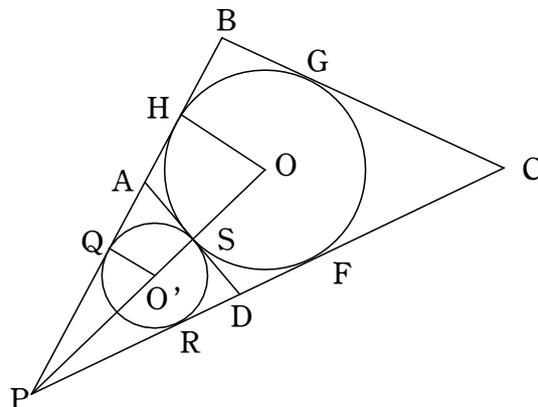
$\triangle O'PQ$ と $\triangle OPH$ は相似なので,

$$x:(x+d+a) = r':r \text{ であり,}$$

$$r'(x+d+a) = rx \quad \dots \text{⑤}$$

③より, $r = \frac{ad}{r'}$ であるから, 代入して,

$$(r')^2(x+d+a) = adx$$

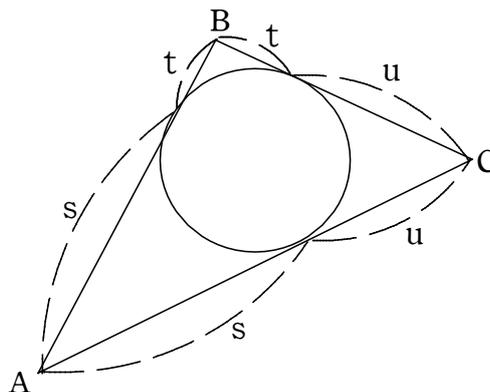


r' は内接円の半径であり, a, d, x は各頂点から円に引いた接線の長さであるから,

$\triangle ABC$ に円Oが内接しているとき,

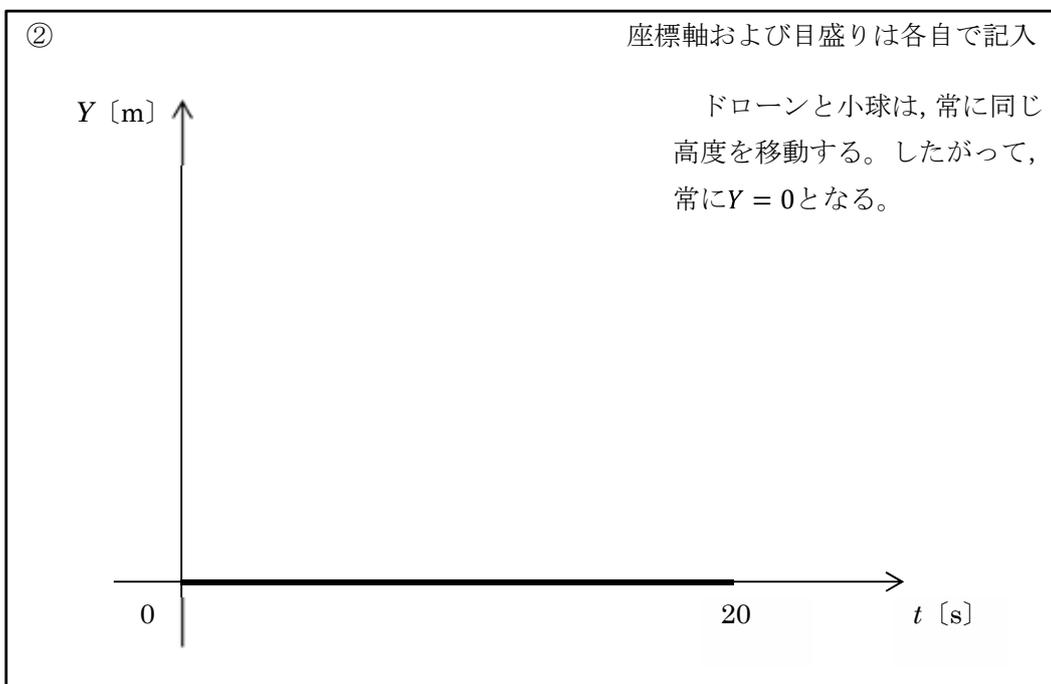
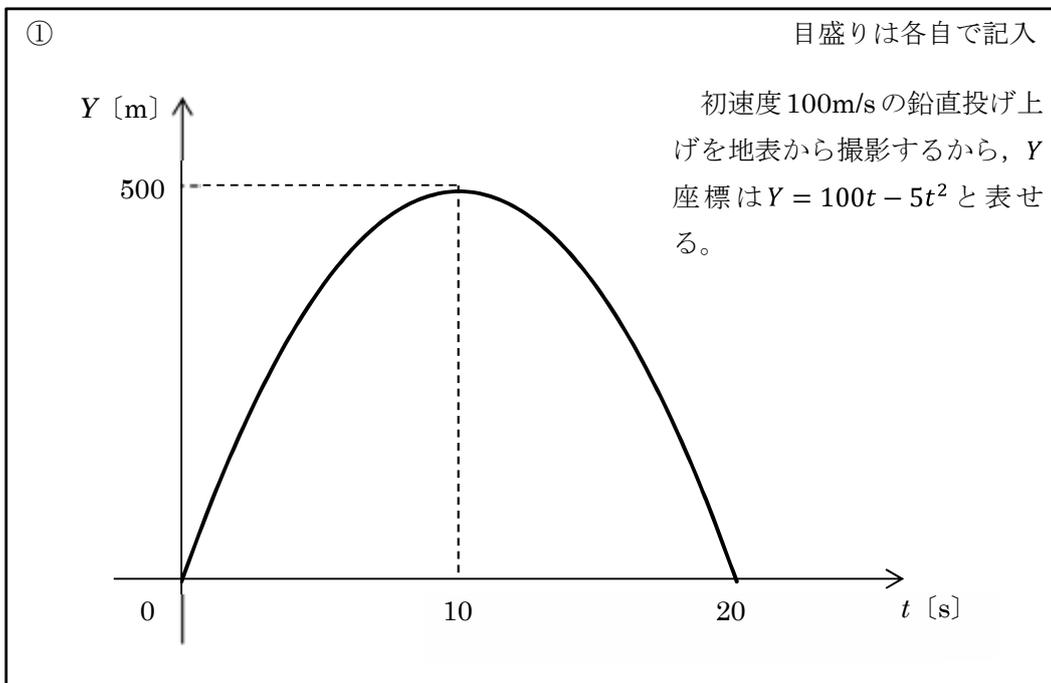
3頂点A, B, Cからの接線の長さをそれぞれ s, t, u とすると,

$r^2(s+t+u) = stu$ が成り立つ。

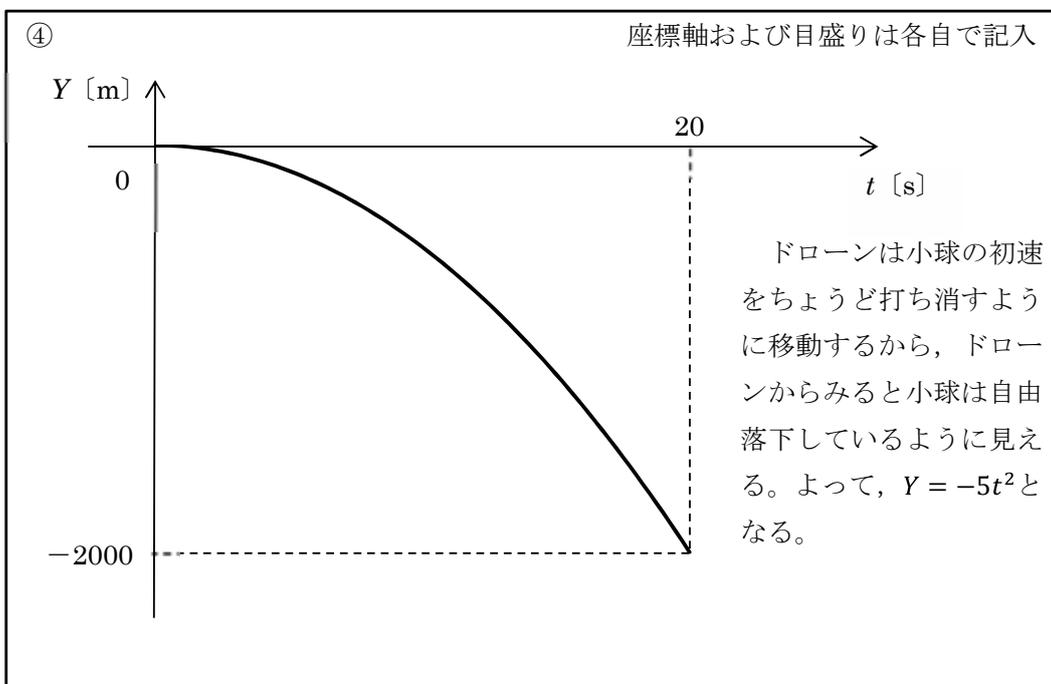
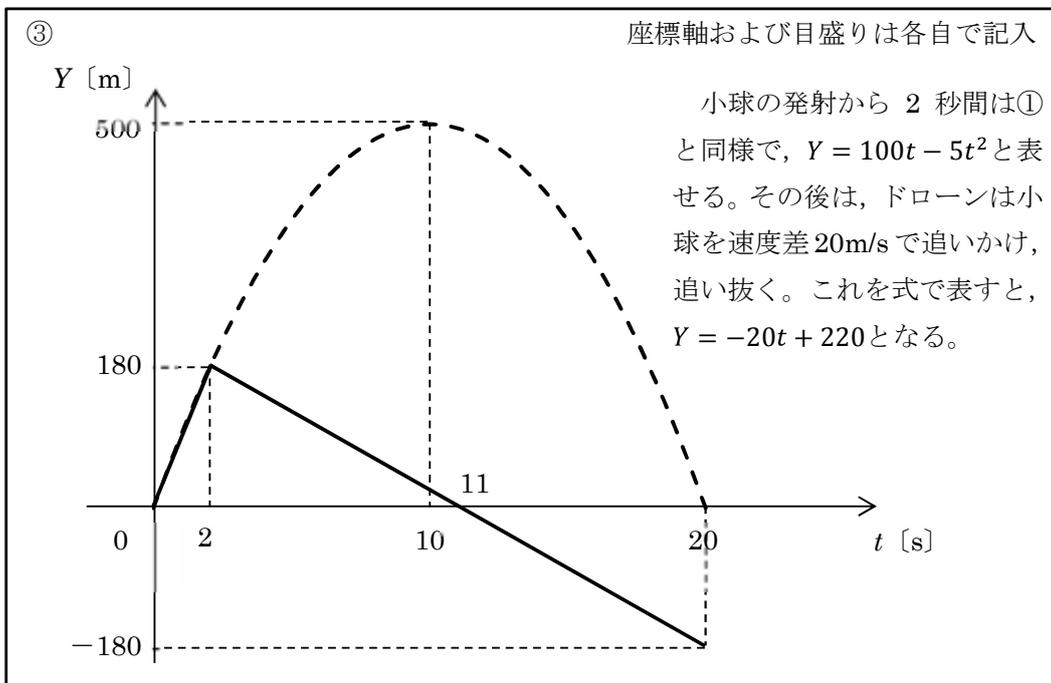


筆記問題

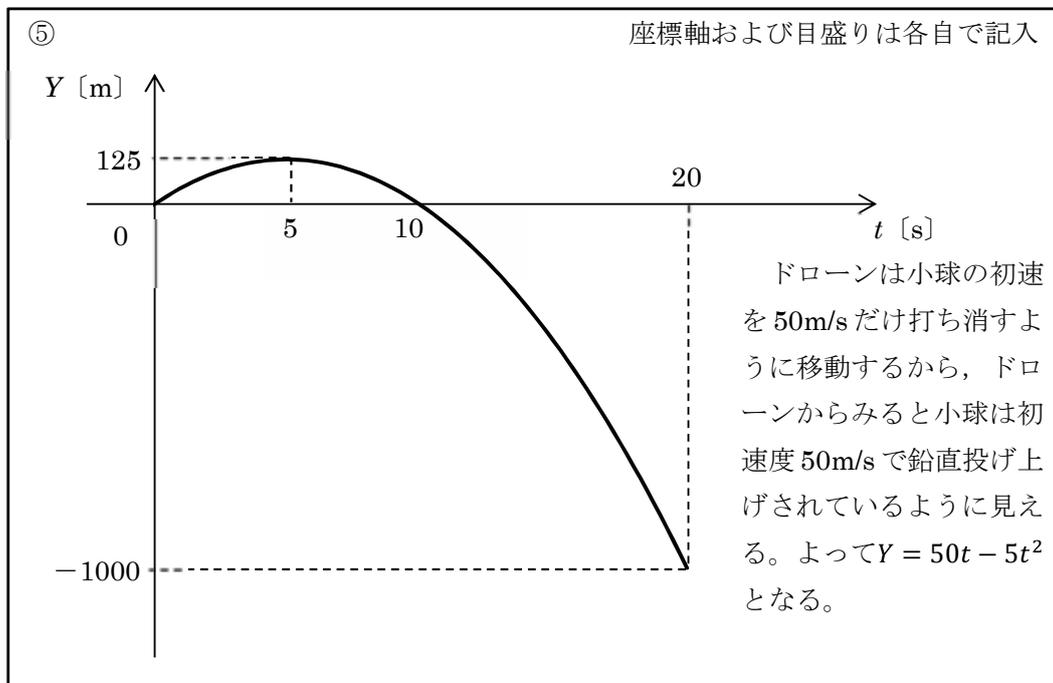
1 1 - (1)



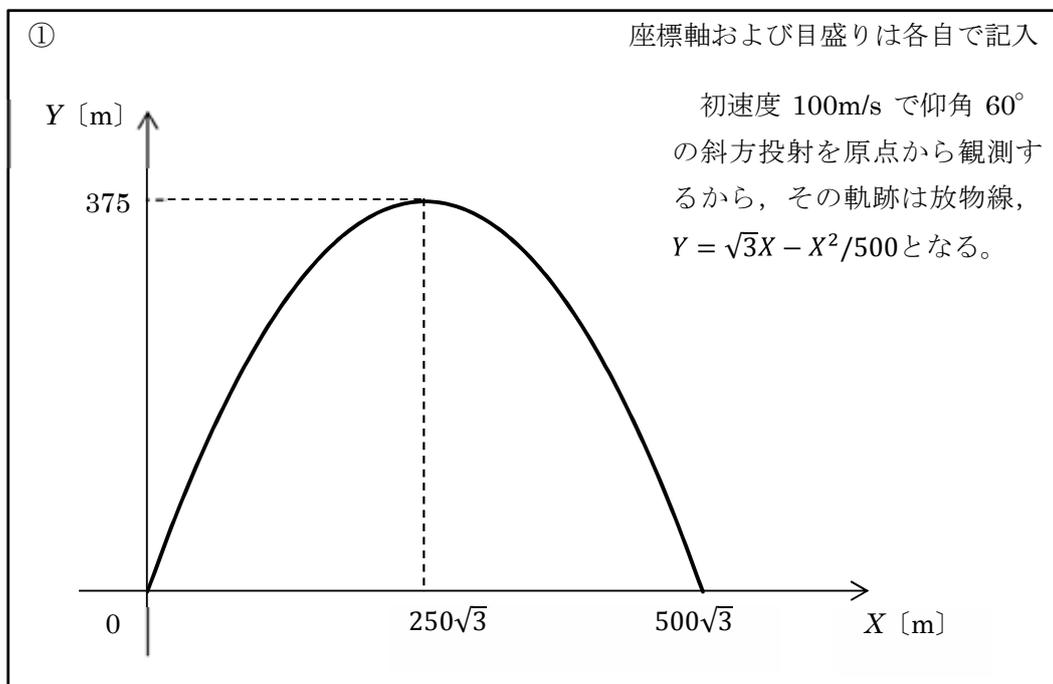
1 1 - (1)



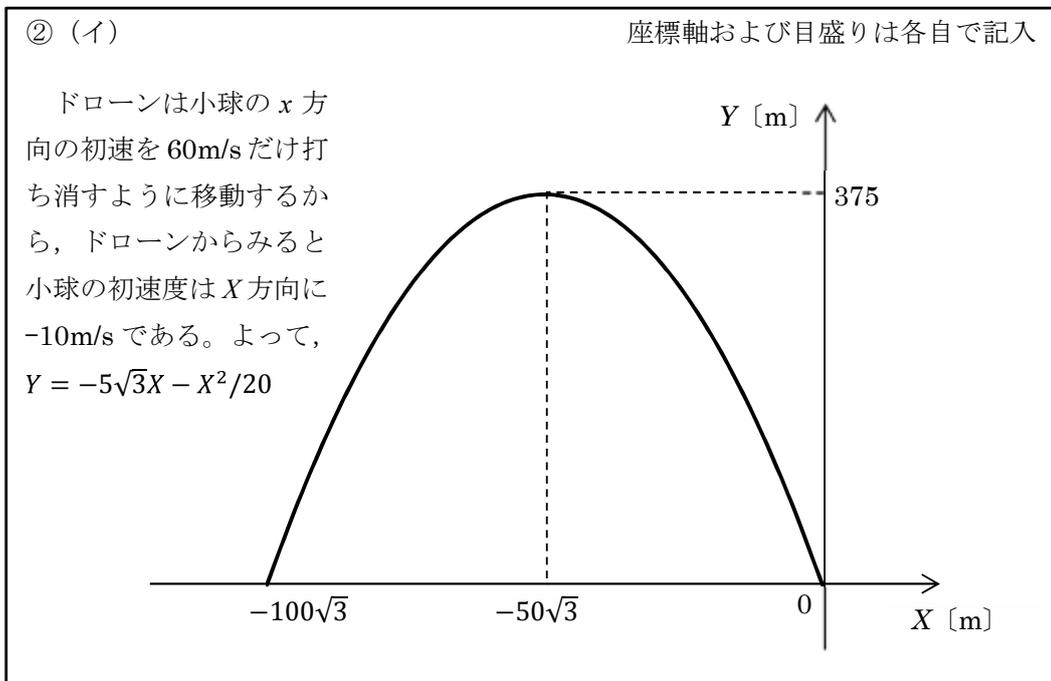
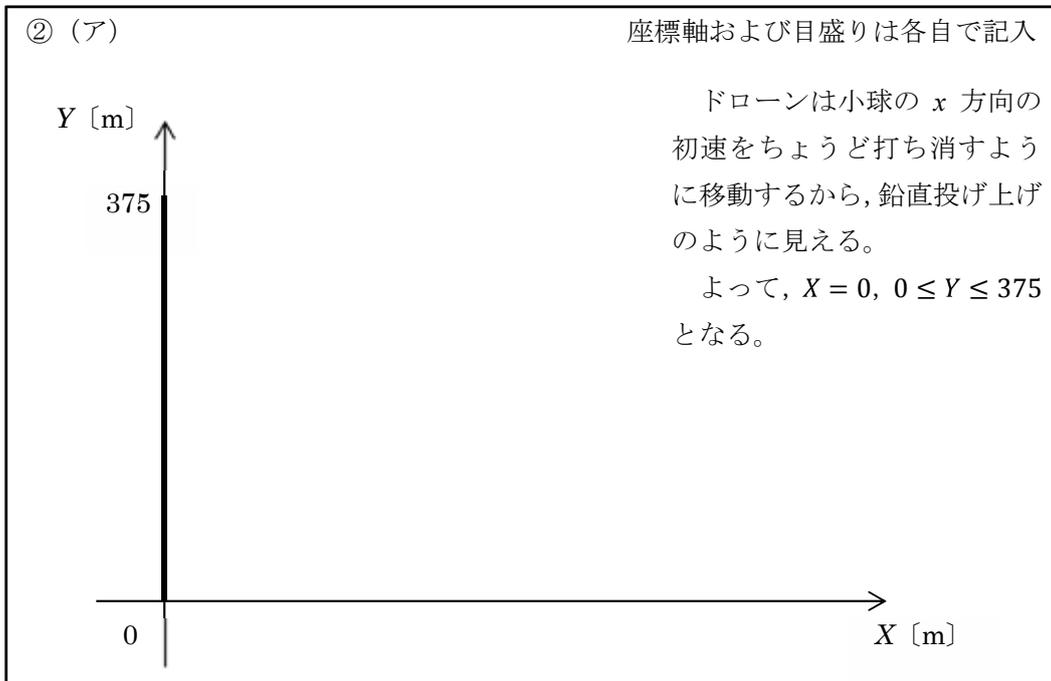
1 1 - (1)



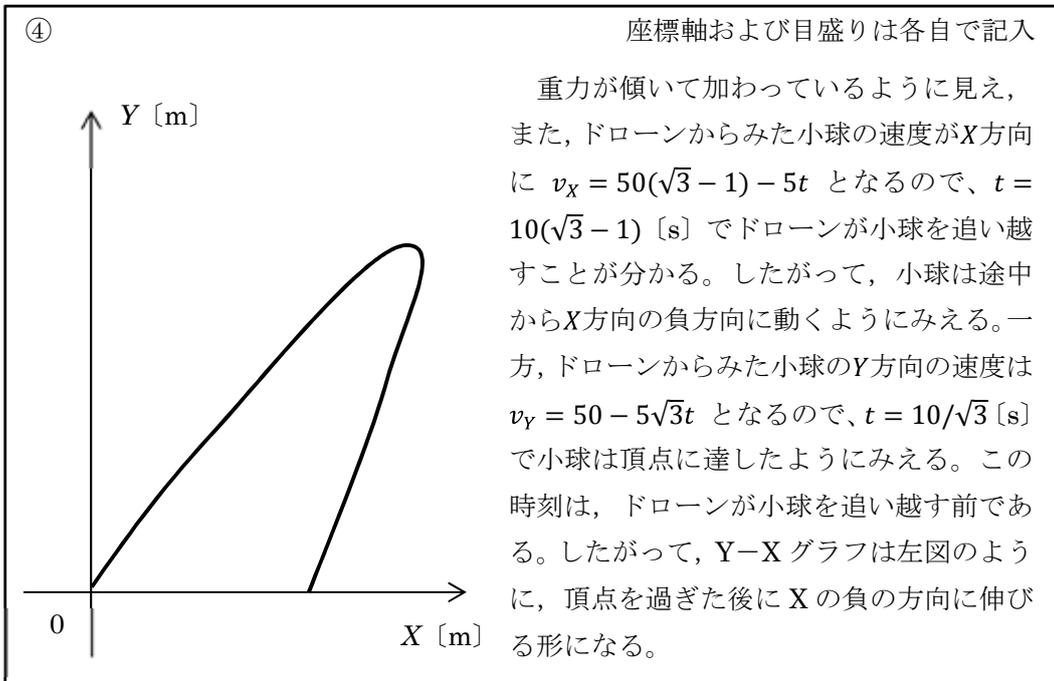
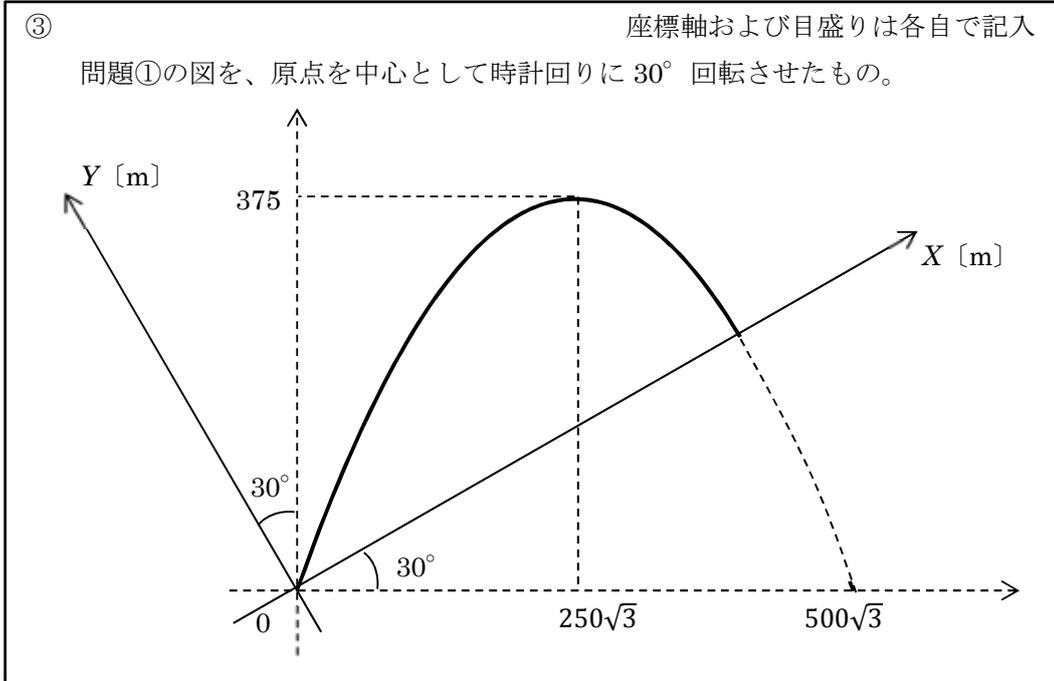
1 1 - (2)



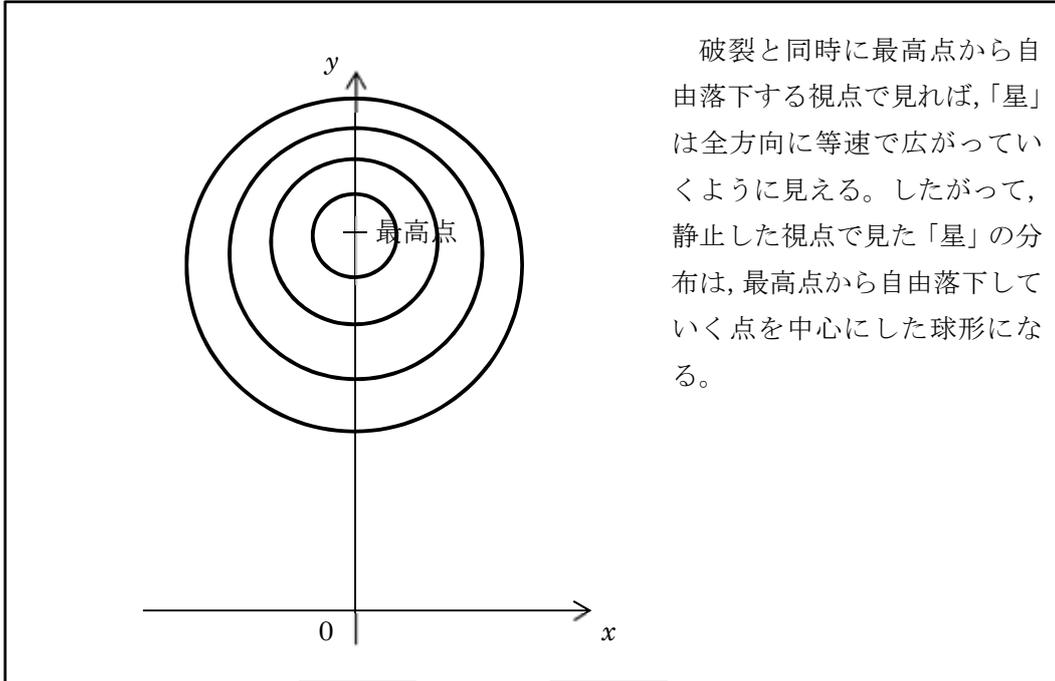
1 1 - (2)



1 1 - (2)



1 2 - (1)



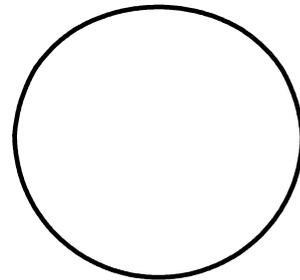
破裂と同時に最高点から自由落下する視点で見れば、「星」は全方向に等速で広がっていくように見える。したがって、静止した視点で見た「星」の分布は、最高点から自由落下していく点を中心にした球形になる。

1 2 - (2)

空気抵抗がないときと比べ、最高点からの「星」の広がりには抑えられて小さくなる。また、落下の速度も抑えられるので、広がりを中心の座標も下がりにくくなる。

さらに、空気に対する速さが大きければ大きいほど、空気抵抗は大きくなる。無風であるとする、「星」の空気に対する速さは、下方ほど大きい。したがって、下方の星ほど大きな空気抵抗を受けて広がりにくくなる。よって「星」の分布は、下側の広がりが抑えられた、ゆがんだ球形になると予想される。

なお、空気抵抗が速度 v に比例する場合、「星」の分布は解析的に求めることができ、球形のままであることが導かれる。空気抵抗が v^2 に比例する場合は、球形からずれる。両方の空気抵抗がある場合にシミュレーションすると、ほとんど球形からずれないが、誇張して書くと右図のようになる。



「星」の分布の様子

実験問題

2

レポート1

(1) 精度よく実験を行うために、振り子の長さ L [m] の測定方法および工夫した点とどのようにした理由について説明せよ。

<振り子の長さ L [m] の測定方法>

振り子の長さは支点からおもりの中心までとした。支点の位置はおもりから鉛直方向に割り箸までの距離とした。振り子の長さ L [m] は、おもりの中心までなので、おもりの穴につまようじを刺し、その位置から鉛直方向に割り箸までの長さを測定した。

<工夫した点>

- ①糸の長さを最大限に長くした。
- ②振り子を設置してから、その長さを測定した。

<そのようにした理由>

- ①振り子の糸を長くすると、周期も長くなるので、周期測定の誤差が小さくなる。そこで、与えられた実験器具と実験環境を考慮し、できる範囲で最大限に糸の長さを長くした。
- ②おもりを取り付けると重さによって糸が伸びることが考えられるため。

(2) 精度よく実験を行うために、周期 T_0 [s] の測定方法および工夫した点とどのようにした理由について説明せよ。

<周期 T_0 [s] の測定方法>

- ①振り子を数回往復させ、その時間をまとめて測定した。そして、測定時間を往復回数で割って周期 T_0 [s] を算出した。
- ②ストップウォッチを押すタイミングを振動の中心にした。

<工夫した点>

- ①周期は10往復の測定値から平均して求めた。
- ②振動の中心が、実験室の机の脚と重なるように目の位置をあわせ、おもりが机の脚を通過したタイミングでストップウォッチを押した。

<そのようにした理由>

- ①1往復だけの時間を測定すると、測定者のストップウォッチを押すタイミングによる誤差が大きく影響するため。なお、回数を多くすると振り子が減衰して誤差が大きくなるため、10往復にとどめて実験を行った。
- ②振動の中心ではおもりの速度が最も速いため、ストップウォッチを押すタイミングによる誤差が小さくなる。また、机の脚を目印にすることで確認しやすくした。

(3) 実験結果をレポート用紙の表に記入せよ。

$$\text{長さ } L = \boxed{0.964} \text{ m } (= \boxed{96.4} \text{ cm })$$

$$\text{振れの角の最大値 } \theta_0 = 5^\circ$$

	測定時間 [s]
1 回目	19.66
2 回目	19.82
3 回目	19.76
4 回目	19.63
5 回目	19.68
平均値	19.71
周期 T_0	1.971

※ 1 回目～5 回目の測定時間は全て 10 往復の時間である。
これらの平均値を 10 で割って周期 T_0 [s] を算出した。

(4) 重力加速度の大きさ g [m/s^2] の値を有効数字 3 桁で求めよ。円周率は $\pi = 3.1416$ とする。

$$\begin{aligned} g &= (4 \times 3.1416 \times 3.1416 \times 0.964) / (1.971 \times 1.971) \\ &= 9.7963 \dots \\ &= 9.80 \end{aligned}$$

$$\text{重力加速度の大きさ } g = 9.80 \text{ m/s}^2$$

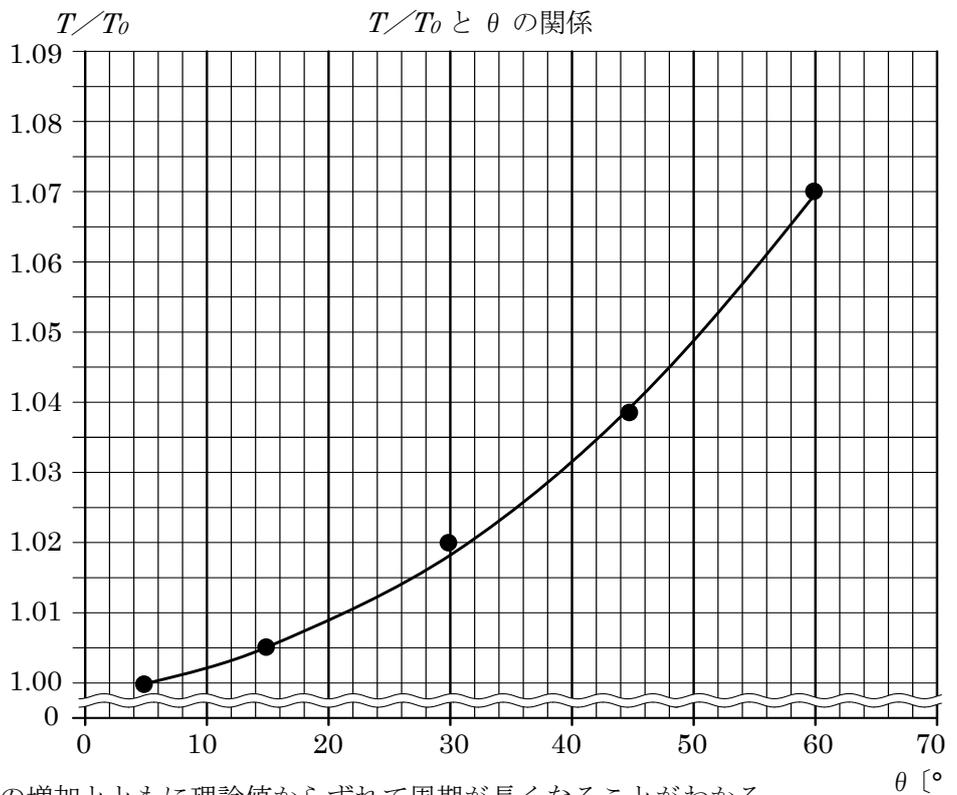
レポート2

※測定時間は全て 10 往復の時間である。周期 T [s] は、平均値を 10 で割って算出した。

(1) 実験結果をレポート用紙の表に記入せよ。ただし、実験 1 で求めた周期を T_0 [s]、実験 2 で求めた周期を T [s] とする。

長さ $L = 0.964 \text{ m}$ (= 96.4 cm)					
角度 θ	5°	15°	30°	45°	60°
1 回目 [s]	19.66	19.80	20.13	20.44	21.06
2 回目 [s]	19.82	19.83	20.06	20.48	21.10
3 回目 [s]	19.76	19.80	20.12	20.51	21.11
4 回目 [s]	19.63	19.81	20.10	20.49	21.15
5 回目 [s]	19.68	19.80	20.09	20.39	21.09
平均値 [s]	19.71	19.81	20.10	20.46	21.10
周期 T [s]	1.971	1.981	2.010	2.046	2.110
周期の比 T/T_0	1.000	1.005	1.020	1.038	1.071

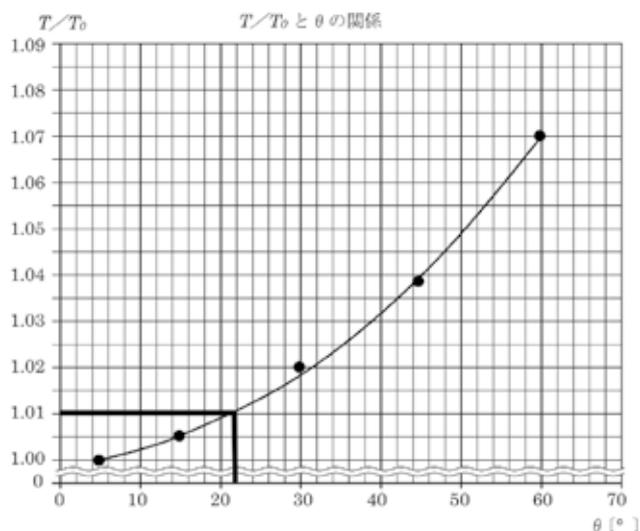
(2) T_0 [s] と T [s] の比 $\frac{T}{T_0}$ の値と、振れの角の最大値 θ [°] は、どのような関係になるか。実験結果をグラフに示し述べよ。



- ・ 角度の増加とともに理論値からずれて周期が長くなることがわかる。
- ・ 周期の比 $\frac{T}{T_0}$ と振れの角の最大値 θ [°] には、2 次関数のような関係があると考えられる。

(3) 振れの角の最大値 θ [°] がどれだけの値までなら、式 (1) が成り立つと考えられるか。どのように考えたかわかるように説明せよ。

・有効数字3桁の実験であるので、周期の比 $\frac{T}{T_0}$ が 1.01 を超えない範囲での最大の角度であれば、式 (1) が成り立つと考えられる。したがって、(2) のグラフからは、概ね 22° 程度までの範囲ならよいと考えられる。



(4) 振れの角の最大値 θ [°] が前述の (3) のような値でなければ式 (1) が成り立つとみなせないのは、なぜか。これまでに学んだ力学の知識をもとに述べよ。

・もともとの理論式は、振り子の運動を単振動として見なして導き出された式であり、振れの角度が大きくなると単振動として扱えなくなるといえる。

・式 (1) は、「おもりが一直線上を往復する運動とみなした場合の近似式」である。図 1 では x 軸に沿った直線上での運動となる。この場合、おもりの移動距離は、実際に運動する弧の方が長い。このため、双方で振動に向かう力が等しいとすれば、周期は、弧の方が長くなり、その差は θ が大きいほど増大する。次に、おもりに働く力は、実際の場合、重力 mg と張力 S の 2 力である。おもりが一直線上を動くとするれば、鉛直方向の力が釣り合う (図 2)。したがって、振れの角が θ' の場合 $S \cdot \cos \theta' = mg$ であり、合力の大きさは $S \cdot \sin \theta' = mg \cdot \tan \theta'$ となる (左右対称な現象なので $0 < \theta' < \pi/2$ について議論、以下同様)。一方、実際には張力 S と重力 mg の中心方向の成分が釣り合うため、合力の大きさは $mg \cdot \sin \theta'$ となる (図 3)。 $\tan \theta' \geq \sin \theta'$ であるから、力は x 軸に沿った運動の方が実際より大きくなる。これも θ が大きいほど差は増大する。以上により、式 (1) は、 θ が大きくなるほど周期の差は増大し、実際の周期の方が長くなることから、単振動として扱えなくなることが分かる。

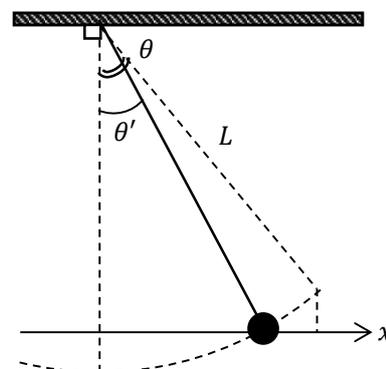


図 1

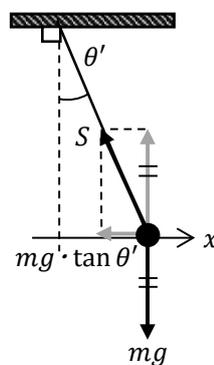


図 2

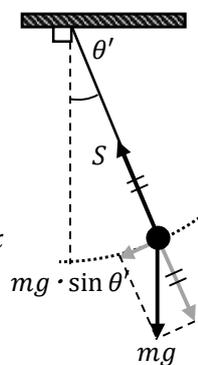


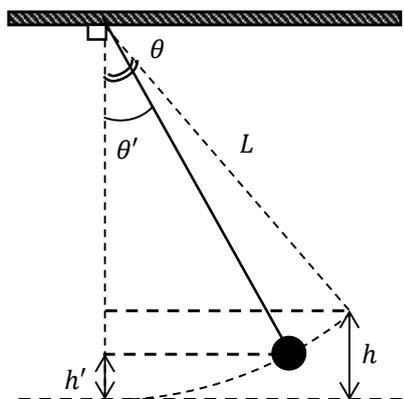
図 3

解説

2 実験問題

以下では、単振り子の周期を厳密に求める。なお、数学Ⅲ相当の微分積分の知識は仮定する。

図のように、長さ L の軽い糸の一端を天井につけ、他端に質量 m の質点をつけて鉛直面内で振る。振れの角の最大値を θ 、途中の振れの角を θ' とし、それぞれの角度での最下点からの高さを h および h' とする。高さ h' のときの質点の速さを v 、重力加速度の大きさを g とすると、エネルギー保存則より以下の式が成り立つ。



$$\frac{1}{2}mv^2 + mgh' = mgh \quad (1)$$

図より、 $h = L(1 - \cos \theta)$ 、 $h' = L(1 - \cos \theta')$ である。よって式(1)は以下のように変形できる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 + mgL(1 - \cos \theta') &= mgL(1 - \cos \theta) \\ \Leftrightarrow v &= \sqrt{2gL(\cos \theta' - \cos \theta)} \end{aligned} \quad (2)$$

さて、時間が Δt 変化するとき振れの角が $\Delta \theta'$ だけ変化した場合、角度を弧度法で表していれば変位は $v\Delta t = L\Delta \theta'$ となる。 $\Delta t \rightarrow 0$ の極限では、 $v = Ld\theta'/dt$ となり、式(2)は以下のような微分方程式となる。

$$L \frac{d\theta'}{dt} = \sqrt{2gL(\cos \theta' - \cos \theta)}$$

これを変数分離して積分すると、以下ようになる。

$$\int dt = \sqrt{\frac{L}{2g}} \int \frac{1}{\sqrt{\cos \theta' - \cos \theta}} d\theta'$$

右辺の θ' の積分範囲を最下点 0 から振れの角の最大値 θ までとすると、かかる時間は周期 T の四分の一である。したがって

$$\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{L}{2g}} \int_0^\theta \frac{1}{\sqrt{\cos \theta' - \cos \theta}} d\theta' \quad (3)$$

ここで、角度の積分範囲が 0 から $\pi/2$ になるように、以下のような変数変換を行う。

$$\begin{aligned} \sin \frac{\theta'}{2} &= \sin \frac{\theta}{2} \sin \phi \\ \Rightarrow d\theta' &= \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \phi}{\cos \frac{\theta'}{2}} d\phi = \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \phi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta'}{2}}} d\phi = \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \phi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta}{2} \sin^2 \phi}} d\phi \end{aligned} \quad (4)$$

また、半角の公式を使うと

$$\cos \theta' - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} - 2 \sin^2 \frac{\theta'}{2} = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \phi \quad (5)$$

式(4)および式(5)を式(3)に代入して整理すると、以下の式を得る。

$$T = 4 \sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta}{2} \sin^2 \phi}} d\phi \quad (6)$$

式(6)の被積分関数をテイラー展開（注1※参照）すると、

$$\begin{aligned} T &= 4 \sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(\sin^2 \frac{\theta}{2} \sin^2 \phi \right)^n d\phi \\ &= 4 \sqrt{\frac{L}{g}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \sin^{2n} \frac{\theta}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \phi d\phi \end{aligned} \quad (7)$$

ここで $n!!$ は二重階乗で、自然数 n に対して一つ飛ばしに積をとったものである。具体的には、

$$\begin{aligned} (2n)!! &= 2n \cdot (2n-2) \cdots 2 \\ (2n-1)!! &= (2n-1) \cdot (2n-3) \cdots 1 \end{aligned}$$

ただし、 $0!! = 1$ および $(-1)!! = 1$ とする。

式(7)の最後の積分は、部分積分を使うと以下のようになる（注2※参照）。

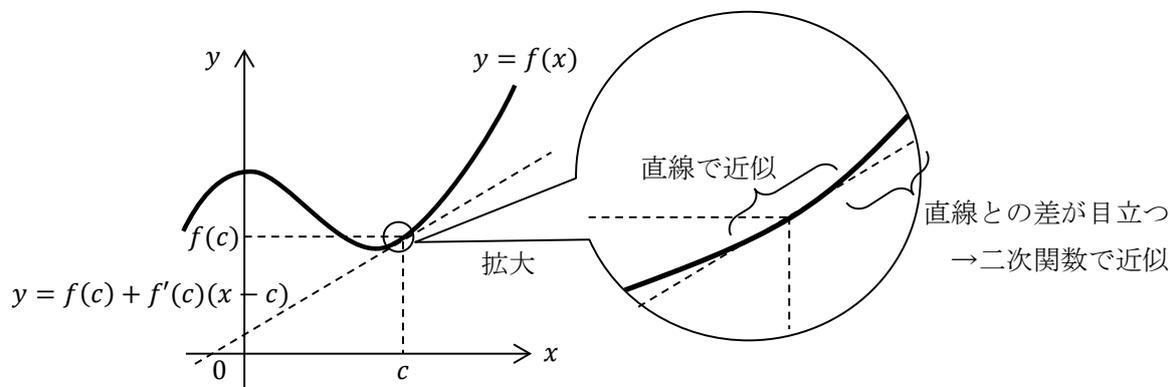
$$\begin{aligned} T &= 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right\}^2 \sin^{2n} \frac{\theta}{2} \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \sin^4 \frac{\theta}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right) \sin^6 \frac{\theta}{2} + \cdots \right\} \end{aligned} \quad (8)$$

式(8)の第一項は、振り子を単振動とみなしたときの近似解になっている。厳密解と近似解の比が式(8)の{ }内にあたり、いくつかの θ について小数点以下4桁まで求めると、下の表のようになる。したがって、理論的に振り子の運動が単振動としてみなせる角度（今回の実験では周期の比が1.01以下になる角度）は、約 22° と分かる。

θ	(厳密解) ÷ (近似解)
5°	1.0005
10°	1.0019
20°	1.0077
21°	1.0085
22°	1.0093
23°	1.0102
24°	1.0111
25°	1.0120
30°	1.0174

注1※ テイラー展開

テイラー展開は、関数の多項式展開である。理工系の学部に進学すれば1年生で習うので、証明など詳しい内容は将来に譲る。ここでは、テイラー展開の意味を簡単に説明する。



上図のように、 x を変数とする関数 $f(x)$ に対して、 $x=c$ (c は定数) 近傍での近似値を求めたいとする。まず最初に思いつくのは、 $f(x) \sim f(c)$ とすることだろう。もうちょっと精度を上げたければ、直線、つまり $x=c$ での接線

$$y = f(c) + f'(c)(x - c)$$

で近似できる。しかし、 $x=c$ から離れるにつれ、直線ではなく曲線的な部分が目についてくる。そうした領域でも近似できるようにしようと思ったら、次は二次関数で近似することが考えられる。係数を調べると、以下のようなになる。

$$y = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{1}{2}f''(c)(x - c)^2$$

では、もっと遠ざかったら……と考えていくと、次々と $(x-c)$ の高次項を加えて補正をかけることができるだろう。その結果、行きつくのが以下のテイラー展開である。

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x - c)^n$$

なお、この等式はいつでも成り立つわけではない。例えば、 $|x-c| \gg 1$ では、この級数は収束しないことが予想されるだろう。どんなときなら成り立つかは、いずれ学んでもらいたい。

さて、式(6)の被積分関数のテイラー展開は、 $c=0$ のとき以下のように展開できることを使っている。

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n$$

ただし、この式が成り立つのは $|x| < 1$ のときである。式(6)では、振れの角の最大値 θ は0から $\pi/2$ までであるから、 x に相当する $\sin^2 \frac{\theta}{2} = \sin^2 \phi$ は最大でも1/2である。よって収束する範囲に収まっており、テイラー展開が可能である。

注2※ 問題の積分を、 I_{2n} とおく。部分積分を使うと、以下のように変形できる。

$$\begin{aligned} I_{2n} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \phi \, d\phi \\ &= [-\cos \phi \sin^{2n-1} \phi]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos \phi)(\sin^{2n-1} \phi)' \, d\phi \\ &= (2n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 \phi) \sin^{2n-2} \phi \, d\phi \\ &= (2n-1)I_{2n-2} - (2n-1)I_{2n} \end{aligned}$$

よって、以下の漸化式が導かれる。

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2}$$

この式を繰り返し使うことで、以下の式が得られる。

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{1}{2} I_0 = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} I_0 = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$$

1

参加番号

(1)

- ・ろうとの脚をビーカーの内壁につけておくとろ液が絶え間なく流れ落ちるので、ろ過速度が小さくならない。
- ・事前にろ過する溶液を静置して固体を沈殿させ、上澄み液からろ過を始める。その他、ろ紙の目を粗くして固体の純度を上げるなど。

(2)

b, d

加熱すると空気も含め気体が膨張するため、加熱を要する物質の体積測定には向かない。ドライアイス(二酸化炭素)など、常温で昇華する物質の体積測定に用いる。また、昇華した気体自身の体積を測定するのではなく、空のびんから押し出された空気の体積を測定するため、昇華した気体が水に溶けたり反応したりする場合であっても、その体積を測定することができる。

(3)

①	(あ) ホールピペット	(い) メスフラスコ
②	塩基性の水溶液は、酸である二酸化炭素の影響を受けやすい。ビュレットのほうがコニカルビーカーよりも空気との接触面積が小さく、コニカルビーカーは滴定のたびに振り混ぜるので、より空気中の二酸化炭素が溶けやすくなってしまう。	
③	(a), (c), (d) を採用した。 (b) は他と比べて大きく滴定量が異なるため、水酸化ナトリウムを加えすぎたものと判断し、除外した。	
④	(a), (c), (d) の平均値を実験の値とすると、0.100mol/L 水酸化ナトリウム水溶液の滴定量の平均は 7.34mL となる。 よって、薄める前の濃度未知の塩酸のモル濃度を X mol/L とすると、 $\frac{X}{10} \times 10.0 = 0.100 \times 7.34$ より、 $X = 0.734$ または 7.340×10^{-1} mol/L	

(1)

取り出した気体の質量は $250.00 - 249.88 = 0.12$ [g]

気体の体積は 58.00 [mL] であるので, 0.058 [L] 密度は $0.12/0.058 \doteq 2.07$ [g/L]

(2) (c)

気体の分子量は, プロパン $C_3H_8 = 44$, ブタン $C_4H_{10} = 58$

混合気体におけるプロパンとブタンの体積比を $x : 1-x$ とすると, 混合気体の平均分子量は $(44x + 58(1-x))$ [g/mol] となる。また, 混合気体 1mol あたりの質量は, (1) で求めた密度より 2.07 [g/L] $\times 24$ [L/mol] $= 49.68$ [g/mol] となる。

よって,

$$(44x + 58(1-x)) = 49.68 \text{ を解くと, } x = 0.5942 \cdots \doteq 0.59$$

プロパン : ブタンの体積比 $= 0.59 : 0.41 \doteq 3 : 2$ となるため, 答えは(c)

(3)

二酸化炭素は一部, 水に溶解する。

よって理論値と比べて体積が小さくなるため, ガスボンベの質量減少から得られた気体の質量とその体積の理論値は一致しない。

結果, 水上置換した二酸化炭素の密度を計算すると理論値より大きくなる。

MEMO

高校部門 化学（筆記）

3

参加番号

(1)

①	$2\text{H}_2\text{O}_2 \rightarrow 2\text{H}_2\text{O} + \text{O}_2$
②	<p>分解反応で酸素が発生したと考えられる試験管に火のついた線香を入れると炎が上がり、燃え方が激しくなる。酸素には物を燃やすのを助ける働き（助燃性）があるため、この方法で確認できる。</p>

(2)

ヨウ素ヨウ化カリウム溶液を加えた時に反応溶液が高温のままだと、デンプンが残っていてもヨウ素分子がデンプンのらせん構造に入らず青紫色に呈色しないので、デンプンが分解されたかどうかをヨウ素デンプン反応で判断できないから。

(3)

ビーカーA (b)	ビーカーB (d)
------------------	------------------

(4)

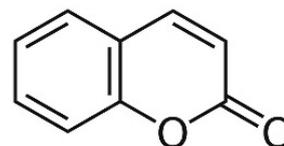
(ア) クマリン	(イ) 液胞
(ウ) 酵素	(エ) 変性（失活）
(オ) 活性	

高校部門 化学（筆記）

【解説】

桜餅に使用している塩漬けにしたオオシマザクラの葉から漂う香りは、日本人には馴染み深い。オオシマザクラに限らず、お花見でよく見かけるソメイヨシノなどサクラの葉は、塩漬けにしたり傷つけたりとすると、「さくらもちの匂い」の正体であるクマリンが生成する。

液胞内のグルコースが結合した α -クマル酸分子が、葉の細胞が傷ついたり、死んだりして液胞の外に存在する酵素グリコシターゼと反応することでグルコースの部分がはずれ、引き続き閉環反応が起きてクマリンが生成するのである。植物は生存して種を存続させるために、いろいろな仕組みを備えている。また、植物や動物は、生体内にできる過酸化水素を、水と酸素に速やかに分解する酵素カタラーゼも備えている。



クマリンの構造式

酵素は生物内の化学反応の触媒として機能するので、非常に重要な物質である。酵素は主に分子量数万以上のタンパク質であり、複雑な立体構造をしていて作用する物質（基質）が決まっている（基質特異性）。基質と結合する活性部位の形が変性によって変化してしまうと元に戻ることはできなくなり、触媒作用が起きなくなってしまう。変性の主な原因としては、加熱、pH 変化、重金属イオン、有機溶媒などがある。今回の問題は酵素の熱変性による失活についてであり、デンプンを酵素アミラーゼで分解する実験から考察した。

アミラーゼの実験はどのような手順で行ったかを図や表にしてみると理解しやすくなる。

【実験】 ヨウ素デンプン反応

ビーカーA 80℃	2分おきに 5mL ずつ取る	考察
<ul style="list-style-type: none"> デンプン水溶液 だ液アミラーゼ 	◎冷却後それぞれヨウ素を含む溶液を加える 2分後 4分後 20分後	80℃でアミラーゼは失活 ↓ デンプンは分解されず、どの試験管内にも同じ濃度のデンプンが含まれている ↓ ヨウ素デンプン反応が起きる
	※ヨウ素デンプン反応が起きるかは、高温の溶液では判定できない	

ビーカーB 37℃	2分おきに 5mL ずつ取る	考察
<ul style="list-style-type: none"> デンプン水溶液 だ液アミラーゼ 	◎冷却後それぞれヨウ素を含む溶液を加える 2分後 4分後 20分後	37℃はアミラーゼの最適温度 ↓ デンプンは時間とともに分解されていき、生成物のマルトースが増加していく ↓ ヨウ素デンプン反応を起こすデンプンの量が減少していき、最終的には呈色しなくなる
	※ヨウ素デンプン反応が起きるかは、高温の溶液では判定できない	

高校部門 化学（筆記）

一方、熱水中、氷中、強酸性、強塩基性、高塩分濃度、超高压下などの極限環境に生きる微生物がいる。これらの微生物も酵素をもっており、その環境下で酵素は働く。80℃でも失活しない耐熱性のアミラーゼもあり、過酷な条件で機能するさまざまな酵素の活用が注目されている。競合する生物が少ない過酷な環境で生き抜いて繁栄するために、通常分子よりはるかに耐性の高い分子を作り出す驚くべき能力をもっている生物がいるのである。

参考文献

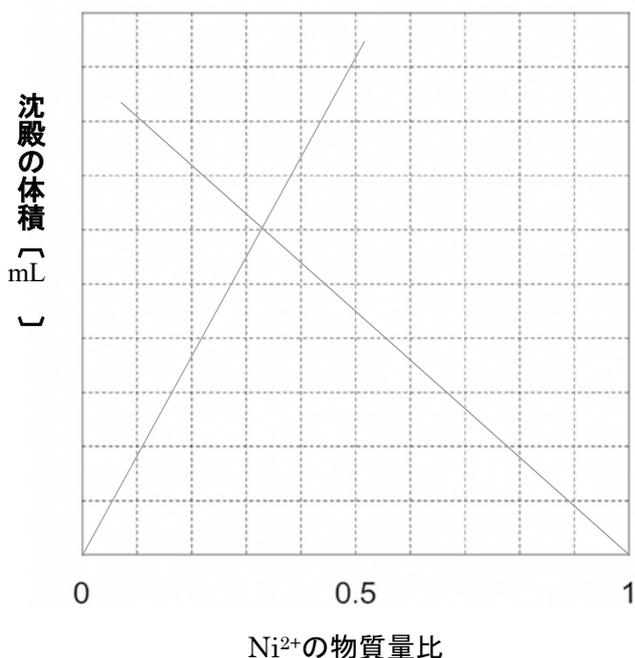
- (1) 田中修 「植物はすごい-生き残りをかけたしくみと工夫-」 2012年 中公新書
- (2) 小野昌弘 「化学のこぼなし『桜の香り』」 大阪市立科学館 月刊うちゅう 2020年5月号, p12-13
- (3) 2011年 東京海洋大学 大学入試問題
- (4) 小幡斉 加藤順子 「微生物の不思議な力」 関西大学出版部 2009年

高校部門 化学（実験）

1

参加番号

問1 (1) ①



②

沈殿が最大となる Ni ²⁺ の物質質量比	0.33
-------------------------------------	------

③

塩化ニッケル（Ⅱ） 溶液の体積 [mL]	3.3
DMG 溶液の体積 [mL]	6.7

(2)

Ni ²⁺ と DMG の 物質質量比	エ
-----------------------------------	---

(3)

試験管アが無色、カが緑色であることから、DMGは無色、塩化ニッケルの溶液は緑色であることがわかる。ニッケル由来の緑色がイで無くなり、ウは沈殿量が最も多いが、緑色が残っていることからイとウの間で沈殿量が最大となると考えられるため、アイおよびウ～カを通る二本の直線の交点が沈殿量が最大になる物質質量比である。

問2 (1)

【操作】で得られた 沈殿量 [mL]	6.5 (目安)
-----------------------	----------

(2) より正確に沈殿量を求める方法

この実験の沈殿は目視では正確な量が読み取りにくい。また、試験管中の対流が落ち着いて沈殿が沈み切るまで時間がかかるので、試験管の温度が室温まで下がり十分沈殿が出てから、ろうとろ紙を用いて沈殿をろ過し、乾燥させて質量を測定して比較すればよい。

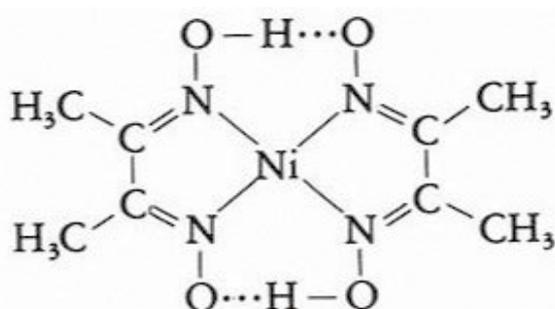
(解説)

表

	ア	イ	ウ	エ	オ	カ
塩化ニッケル(Ⅱ)溶液の体積 [mL]	0	2.0	4.0	6.0	8.0	10
DMG 溶液の体積 [mL]	10	8.0	6.0	4.0	2.0	0
Ni ²⁺ の物質比 $n_{\text{Ni}} / (n_{\text{Ni}} + n_{\text{DMG}})$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
目視の沈殿量の目盛り	沈殿無し	3.6	5.4	3.6	1.8	沈殿無し
反応後の溶液の色	無色	無色	緑	緑	緑	緑

表より、カの試験管は塩化ニッケル(Ⅱ)のエタノール溶液であり、緑色の溶液であることから、ウ～オの試験管の溶液の緑色は塩化ニッケル由来であることがわかる。(ニッケル(Ⅱ)イオン Ni²⁺の色だとわからなくても、塩化ニッケルが原因であることは推定できる)

一方、アの試験管はジメチルグリオキシム DMG のエタノール溶液であり、無色の溶液であることから、無色のイの試験管の溶液は、アと同様に緑色のニッケル(Ⅱ)イオン Ni²⁺が無い状態だと考えられる。



ニッケルジメチルグリオキシム錯体
明るい赤色

このことから、イではエタノール溶液中のニッケル(Ⅱ)イオン Ni²⁺が過剰の DMG と錯体をつくっており、ウ～オでは DMG の量が不足して未反応の Ni²⁺が存在していることが図 1 と表から見て取れる。

沈殿のかさ高さと反応した Ni²⁺の物質量は比例の関係にあることから、グラフをかくと、ア、イの直線とウ～カの直線を引くことができ、2本の直線の交点で沈殿が最大となることが予想できる。沈殿が最大となる Ni²⁺の物質比はグラフから 0.33 と読み取れるので、全体が 10mL になるように塩化ニッケル溶液 3.3mL と DMG 溶液 6.7mL を反応させると沈殿量は最大になる。

物質比 = 体積比となるため、NiCl₂(Ⅱ)溶液の体積 : DMG 溶液の体積 = 3.3 : 6.7 ≒ 1 : 2 となる。



高校部門 化学（実験）

2

参加番号

表

金属の組合わせ	正極の金属	負極の金属	電位差 [V] (目安)
A と B	A	B	0.75
B と C	C	B	0.55
C と A	A	C	0.17

実験を行って気がついたこと等あれば書きなさい

B と C の電位差と C と A の電位差を合計すると、A と B の組み合わせの電位差に近い値となる。(また、A と B はイオン化傾向が離れていて、その間に C が位置すると考えられる)

問い

金属 A~C は何か答えなさい。

金属 A	銅 Cu	金属 B	亜鉛 Zn	金属 C	鉄 Fe
------	------	------	-------	------	------

理由

金属 A と B では A が正極になったため、電子の流れる向きは B→A

よって、イオン化傾向は B>A である。

同様に、金属 A と C ではイオン化傾向の関係は C>A

また、金属 B と C では B>C より、B>C>A の順でイオンになりやすい。

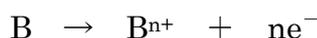
よって、試料金属をイオン化傾向順に並べると、亜鉛>鉄>銅となるため、上記の答えになる。

(解説)

酸化還元反応によって化学エネルギーを電気エネルギーに変換して取り出す装置を電池と呼んでいる。イオン化傾向が異なる金属を電解質水溶液に浸すと、負極となる金属からは電子 (e^-) が流れ出し、正極へ流れ込む。電流は電子の向きと逆向きに流れるので、正極から負極へ流れることになる。

右は、電圧計の+極を金属 A、-極を金属 B につないで電位の測定を行っている図である。この時、電圧計が+側に振れる。これは、-極につないだ金属 B から電子が流れ込んでいるということを意味する。

よって、金属 A より金属 B の方が電子を失って陽イオンになりやすく、イオン化傾向が大きい金属ということになる。



実験結果より、電圧計の+極につないだ場合に電流が+に流れる金属はイオン化傾向が小さい金属ということになる。

イオン化列と比較すると、電圧計の+極につないだ場合にどの金属とつないでも電圧計が+側に振れた金属 A は最もイオン化傾向が小さいということになるので、銅 Cu である。

その反対に、電圧計の-極につないだ場合にどの金属とつないでも電圧計が+側に振れた金属 B は最もイオン化傾向が大きいということになるので、亜鉛 Zn である。

よって金属 C はイオン化傾向が A と B の間に位置する金属ということになり、鉄 Fe であることがわかる。

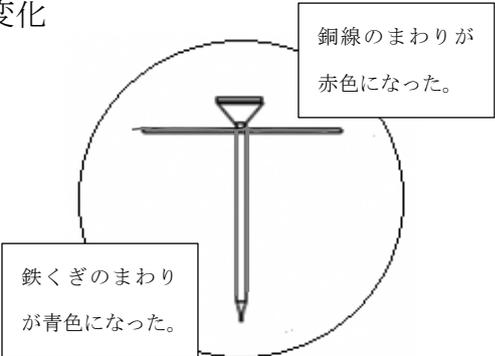


高校部門 化学（実験）

3

参加番号

問 1

(1)	<p>プラカップ A 内の変化</p> 	
(2)	<p>①酸化された金属 鉄</p>	<p>②イオン反応式 $\text{Fe} \rightarrow \text{Fe}^{2+} + 2\text{e}^{-}$</p>
	<p>③さびやすい順番</p>	<p>鉄 > 銅</p>

問 2

<p>(1) さびの原因となる物質</p> <p style="text-align: center;">空気中の酸素</p>
<p>(2) 操作 1, 操作 2 の結果の比較・考察</p> <p>空気にさらしたプラカップ A では、銅線のまわりはフェノールフタレインの呈色で赤色になったことから、塩基性になったことが分かる。そして、鉄くぎのまわりは青色になったので、鉄が酸化される反応 ($\text{Fe} \rightarrow \text{Fe}^{2+} + 2\text{e}^{-}$) も同時に起きたと考えられる。しかし、窒素を充填したプラカップ B ではこれらの反応は起きにくかった。一方、酸素を充填したプラカップ C では、プラカップ A と同様の反応が、プラカップ A よりも早く進行した。空気は主に窒素と酸素で構成されているので、プラカップ A で起こった変化は窒素ではなく、空気中の酸素が反応したことによると考えられる。鉄が酸化されて鉄(II)イオンに変化した時に放出される電子はイオン化傾向の小さい銅に移動する。銅のまわりでは、溶液に溶けている酸素が電子を受け取って $\text{O}_2 + 2\text{H}_2\text{O} + 4\text{e}^{-} \rightarrow 4\text{OH}^{-}$ の反応が起きたため、塩基性になったと考えられる。鉄を負極活物質、酸素を正極活物質とする電池が構成されたと考えてよい。つまり、鉄のさびの原因となる物質は空気中の酸素であると考えられる。</p>

工夫した点

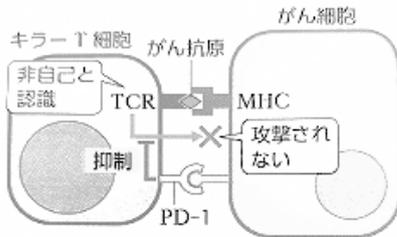
1

【解答】

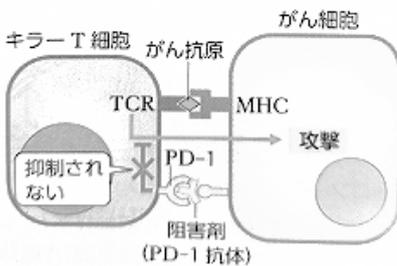
(1)	(例) ニボルマブという抗体は、PD-1と特異的に結合することで、がん細胞がもつPD-L1/L2との結合を阻害する。結果としてPD-1を介したT細胞の活性低下を阻害し、T細胞はがん細胞への攻撃性を維持することができるようになる。	
(2)	1, 652, 400種類	
(3)	(例) 1つの抗体はある特定の抗原しか認識できず(おたふくかぜウイルスを認識する抗体は、はしかのウイルスは認識できない)、また1つの形質細胞からは1種類の抗体しか作ることができない。身体の中には、あらゆる抗原に対処するために、あらかじめ多数のB細胞を待機させ、それぞれに異なる抗体を作らせることで病原体(抗体)の襲来に備えている。	

【解説】

(1) 免疫チェックポイント分子(PD-1)の働き



阻害剤を投与した場合



(出典先 ニューステージ生物図表/浜島書店/2021年)

(2) L鎖 : $40 \times 5 = 200$ 種類 H鎖 : $51 \times 27 \times 6 = 8,262$ 種類 全部で $200 \times 8,262 = 1,652,400$ 種類

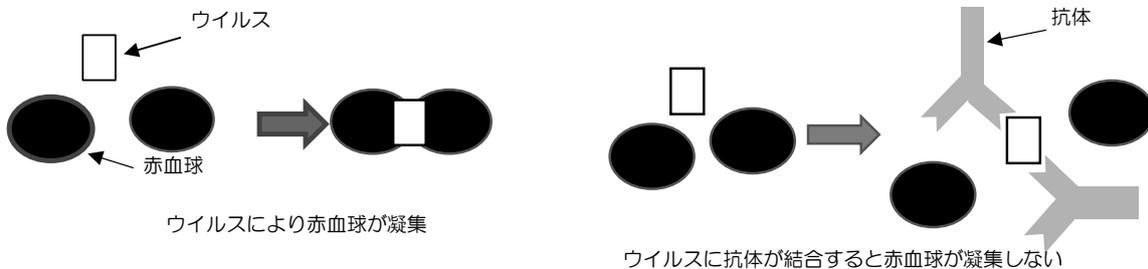
2

【解答】

(1)	(例) A型の抗原とA型の標識抗体との間で抗原抗体反応が起こり、両者が結合したまま判定部へ移動する。その複合体はA型の捕捉抗体に結合する。A型の捕捉抗体の部分では呈色物質が集積し、呈色することで目視することができる。
	(A)
(2)	① 理由 (例) 抗原の侵入が2回目である場合、記憶細胞に保存されている抗体産生に関する情報が速やかに発現するため、1回目の侵入と比較して抗体産生量は増加し、抗体産生に要する時間も短時間であると予想される。
	② (例) A型ウイルスは、ゲノムがRNAのため、同じ亜型であっても、突然変異によってHA(ヘマグルチニン)やNA(ノイラミニダーゼ)の構造が突然変異を起こしやすい。そのため、体液性免疫ではたらく細胞は抗原の微妙な構造の違いを認識してしまい、変異したウイルスに対して記憶細胞がはたらかない。
(3)	A型H1型 理由 (例) ① 発症直後において、3つの型のうち、A型H1型とB型は希釈することで、凝集が抑制されており、A型H1型の凝集が起こらない最低希釈倍率は32倍で、B型での最低希釈倍率は16倍となっている。このことから、発症直後はA型H1型に対する抗体はB型の抗体より多く存在していたと考えられる。また、A型H1型に対しては発症直後と回復期で、凝集が起こらない希釈倍率が変化しなかった。従って、A型H1型のワクチンによって抗体がすでに産生されたと判断できる。
	B 型 理由 (例) ② B型は、発症直後の血清では凝集抑制できなかった濃度であっても、回復期になると凝集抑制が起こっている。このことからB型に感染したことによって、抗体の濃度が上昇したと考えられ、B型に感染したと判断できる。

【解説】

- (3) インフルエンザウイルスはウイルス表面に存在するヘマグルチニン(HA)によって赤血球を凝集させるが、ウイルスに対する抗体があるとその凝集を抑制することができる。



- ①補足:実際のワクチンは、流行予測に基づいてA型の亜型数種とB型の混合で行われている。

2

【解答】

(4)	①	(例) タミフルやリレンザはノイラミニダーゼの活性部位に結合することによって、ノイラミニダーゼが基質と結合することを阻害し、感染細胞からのウイルス放出を防ぐ。
	②	<div style="display: flex; align-items: center; gap: 10px;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px 10px;">274</div> <div>番のアミノ酸を指定するDNAの鋳型鎖の塩基配列が</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">G</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">T</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">G</div> <div>から</div> </div> <div style="display: flex; align-items: center; gap: 10px;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">A</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">T</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">G</div> <div>に変わったことによりアミノ酸が</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px 10px;">ヒスチジン(His)</div> <div>から</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px 10px;">チロシン(Tyr)</div> </div> <p>に変わった。</p>

【解説】

271	272	273	274	275	276	
3' -GGA	TTA	ATA	ATG	ATA	CTC - 5'	←変異後のDNAの鋳型鎖 (①)
5' -CCU	AAU	UAU	UAC	UAU	GAG - 3'	←①をもとにしたmRNA (②)
-Pro	Asn	Tyr	Tyr	Tyr	Glu -	←②から翻訳できるアミノ酸

*表3より

よってHisがTyrに変わったことがわかる。

またHisからTyrに変わったことからDNAの塩基配列を考えるとHisのmRNAは表3よりCAUまたはCACであることから、DNAの鋳型鎖は、GTAかGTGであると考えられる。

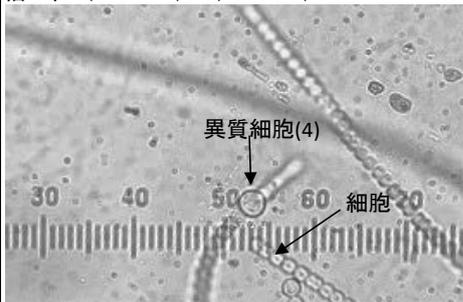
図6のDNAの鋳型鎖より変異後の274番はATGなので、塩基1つの置換であることからもとのDNAはGTGであることがわかる。

1

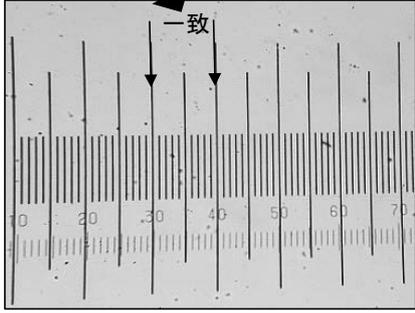
【解答】

①	3	μm			
(1)	②	対物レンズの倍率	4倍	10倍	40倍
		計算式	$\frac{50 \times 10}{20}$	$\frac{10 \times 10}{10}$	$\frac{5 \times 10}{20}$
		1目盛りの長さ	25 μm	10 μm	2.5 μm

(2) 倍率 (15) × (40)



細胞の直径 2.0 ~ 3.0 μm



(3) イシクラゲは(単細胞)生物である。

(例)
細胞の形態は球形で均一である。個々の細胞にべん毛や繊毛の有無などの違いはない。また、細胞の大きさから原核細胞であると考えられる。これらのことから多細胞生物ではないと考えた。しかし、1個だけで存在する細胞も見つからないため、単細胞生物が群体を形成したのと考えられる。

(4) (例)
光化学系Ⅱの消失や酸素の侵入を防ぐ膜の形成は細胞内を嫌気的な環境に保つ効果があり、大気中の窒素を取り込み、アンモニウムイオンを合成する窒素固定の働きを行っていると考えられる。

【解説】

(1)① 対物マイクロメーター3目盛り分(6目盛り)と接眼マイクロメーター10目盛り分(20目盛り)が一致しているので、以下の計算式となる。

$$\frac{\text{対物マイクロメーターの目盛り数} \times 10 (\mu\text{m})}{\text{接眼マイクロメーターの目盛り数}} = \frac{3 \times 10}{10} = 3 \mu\text{m}$$

(2)~(4)

- ・イシクラゲは、光合成を行う原核生物であるネンジュモの一種である。
ネンジュモの仲間は細胞が糸状に連なった糸状体を形成する。
糸状体(細胞糸)の細胞列には通常の細胞より一回り大きく、窒素固定をするために分化した異質細胞(異型細胞, 異形細胞, ヘテロシスト)が見られる。
- ・プレパラートの作成時に、材料を十分にほぐし、広げると細胞どうしの重なりが少なくなり観察が容易になる。
- ・対象物が5 μm 以下の大きさであることから、大きさの測定は40倍の対物レンズを使用していきたい。
また、スケッチは測定と同じ倍率で行うことが望ましい。
- ・スケッチに球形の細胞が連なった様子が示されていれば評価の対象とする。
- ・スケッチに異質細胞(周囲の細胞と比較して輪郭が鮮明で大型、無色透明である。色と大きさの違いによって区別が可能)が示されていれば評価の対象とする。
- ・顕微鏡で見ると、細胞が数珠(じゆず)状に連なる構造をしており、ネンジュモの名の由来がわかる。
- ・細胞1つの大きさは、2.0 ~ 3.0 μm とゾウリムシなどの真核の単細胞生物よりも小さい。
(例: ゾウリムシの大きさは100 ~ 200 μm)

2

【解答】

(1)	<p>スケッチ 倍率 (15) × (4) ※下記の欄にスケッチしなさい。</p> 				
(2)	<table border="1"> <tr> <td data-bbox="220 792 847 846">生物名</td> <td data-bbox="847 792 1420 846">シラエビ</td> </tr> <tr> <td colspan="2" data-bbox="220 846 1420 1068"> 理由 (例) ・外骨格である ・脚が多い(胸脚が複数ある) ・触角をもつ ・尾をもつ(尾刺, 尾肢) など </td> </tr> </table>	生物名	シラエビ	理由 (例) ・外骨格である ・脚が多い(胸脚が複数ある) ・触角をもつ ・尾をもつ(尾刺, 尾肢) など	
生物名	シラエビ				
理由 (例) ・外骨格である ・脚が多い(胸脚が複数ある) ・触角をもつ ・尾をもつ(尾刺, 尾肢) など					

【解説】

(1)

- ・ミジンコは淡水性の甲殻類である。
- ・ミジンコに見られる大きな眼は、横から見ると左右にあるように思えるが、実際は左右が癒合した1つの複眼である。正面から観察すると一つ目のお化けのように見える。
- ・観察に用いたミジンコは体長1.5～3.5mmなので、接眼レンズ(×15)に対し、適切な対物レンズを選択して観察できていれば評価の対象とする。
- ・スケッチに1つの複眼の様子が示されていれば評価の対象とする。
- ・スケッチの胸脚や触角などに節足動物の特徴である節の構造が示されていれば評価の対象とする。

(2)

- ・ミジンコは節足動物の中でも甲殻類に分類される仲間で、5種の生物のうちシラエビが最も近縁種といえる。
- ・観察したスケッチに甲殻類の特徴が描けていれば、ミジンコの胸脚の形態とシラエビの胸脚の形態が近似していることが分かる。
- ・触角をよく観察すると節の構造がわかり、そこからも節足動物であることが推測できる。
- ・体を包む殻は、外骨格であり、節足動物の特徴といえる。

